

# Rhéologie

## et introduction à la mécanique des fluides

*παντα ρει*



Arabia Mountain Migmatite, DeKalb County, Georgia [courtesy [www.scottranger.com](http://www.scottranger.com)]

**Y. Leterrier**

Laboratoire de Mise en Œuvre de Composites à Haute Performance (LPAC)  
Institut des Matériaux (IMX)  
École Polytechnique Fédérale de Lausanne (EPFL)

Support du cours MSE-206 destiné aux étudiants de 2<sup>ème</sup> année  
en science et génie des matériaux

– Edition 2018 –



La saisie de ce cours a été réalisée sur la base des notes de cours du Professeur J.-A. E. Månson et du Dr. P. Kim par A. Leitner (MX 2ème année) sous la direction de Dr. P. Kim (LTC) ; elle a été revue par C. Servais (LTC) et Dr. A. Luciani.

La seconde édition a été réalisée par J. Verrey (MX 2ème année) et revue par C. Servais (LTC).

La troisième édition a été réalisée par J.-C. Ebinger (LTC) et revue par C. Servais (LTC).

La quatrième édition a été réalisée par J. Kuster, F. Kohler (MX 2ème année) et revue par A. Sarioglu (LTC).

La cinquième édition a été réalisée par J. Cordonier (MX 2ème année) et revue par Dr. V. Michaud (LTC) et A. Sarioglu (LTC).

La sixième édition a été réalisée par M.-E. Jan et F. Mauris (MX 2ème année) et revue par Dr. V. Michaud (LTC) et A. Sarioglu (LTC).

Les septième et huitième éditions ont été réalisées par Dr. V. Michaud (LTC) et Dr. D. Merhi (LTC) sur la base des commentaires des élèves de l'année précédente.

La neuvième édition a été réalisée par J. Carron (MX Master) et revue par Dr. V. Michaud (LTC).

La dixième édition a été réalisée par A. Lamkarfed (MX Master) et revue par Dr. V. Michaud (LTC).

Les onzième et douzième éditions ont été réalisées par Dr. Yves Leterrier (LPAC).





## TABLE DES MATIERES

PREAMBULE .....	XI
-----------------	----

BIBLIOGRAPHIE .....	XII
---------------------	-----

### **1        DEFINITIONS**

---

1.1	COMPORTEMENTS ELASTIQUE, VISQUEUX ET VISCOELASTIQUE .....	1.1
1.1.1	Comportement élastique .....	1.1
1.1.2	Comportement visqueux .....	1.1
1.1.3	Comportement viscoélastique .....	1.2
1.1.4	diagrammes du comportement (approche "ingénieur") .....	1.2
1.2	TENSEUR DES CONTRAINTES .....	1.4
1.2.1	Partie hydrostatique et déviatorique .....	1.4
1.2.2	Considérations analytiques pour les calculs des contraintes .....	1.5
1.3	CISAILLEMENT ET EXTENSION .....	1.6
1.3.1	Cisaillement simple .....	1.6
1.3.2	Extension .....	1.8
1.3.3	Fonctions matérielles .....	1.9
1.4	CAS DE SOLLICITATIONS .....	1.10
1.4.1	Fluage .....	1.10
1.4.2	Relaxation de la contrainte .....	1.11
1.4.3	Recouvrance de la déformation .....	1.12
1.4.4	Effacement de la contrainte .....	1.12
1.4.5	Cas général .....	1.13
1.5	VISCOSITE ET NOMBRES ADIMENSIONNELS .....	1.14
1.5.1	Viscosité .....	1.14
1.5.2	Nombres adimensionnels .....	1.15

### **PREMIERE PARTIE : RHEOLOGIE DES SOLIDES**

### **2        MODELES MECANQUES ET PRINCIPE DE BOLTZMANN**

---

2.1	REPRESENTATION DU FLUAGE .....	2.1
2.1.1	Courbe idéalisée pour une contrainte constante .....	2.1
2.1.2	Courbes de fluage .....	2.2
2.1.3	Courbe des modules de fluage .....	2.3
2.1.4	Courbes (isochrones) contrainte - déformation .....	2.3
2.1.5	Représentation mathématique .....	2.4
2.1.6	Une équation généralisée .....	2.5

2.2	REPRESENTATION DIFFERENTIELLE DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE .....	2.5
2.3	LE MODELE DE MAXWELL .....	2.7
2.3.1	Fluage (Maxwell) .....	2.8
2.3.2	Relaxation (Maxwell) .....	2.9
2.3.3	Recouvrance de la déformation (Maxwell) .....	2.10
2.4	LE MODELE DE KELVIN (VOIGT) .....	2.10
2.4.1	Fluage (Kelvin) .....	2.11
2.4.2	Relaxation (Kelvin) .....	2.12
2.4.3	Recouvrance de la déformation (Kelvin) .....	2.12
2.5	RESUME MAXWELL/KELVIN .....	2.12
2.6	LE MODELE STANDARD LINEAIRE (SLSM : STANDARD LINEAR SOLID MODEL) .....	2.14
2.6.1	Fluage (SLSM) .....	2.15
2.6.2	Relaxation (SLSM) .....	2.16
2.6.3	Recouvrance de la déformation .....	2.18
2.7	PRINCIPE DE SUPERPOSITION DE BOLTZMANN .....	2.20
2.7.1	Viscoélasticité linéaire .....	2.20
2.7.2	Principe de superposition .....	2.21
2.7.3	Cas spéciaux du principe de superposition de Boltzmann .....	2.24
2.8	INFORMATIONS COMPLEMENTAIRES .....	2.26
2.8.1	Transformée de Laplace .....	2.26
2.8.2	Relations entre $R(T)$ et $J(T)$ .....	2.28
2.8.3	Exemple .....	2.30
2.9	RESUME DES FORMULES PRINCIPALES .....	2.32
2.9.1	Equation générale du modèle de Maxwell .....	2.32
2.9.2	Equation générale du modèle de Kelvin (Voigt) .....	2.33
2.9.3	Equation générale du modèle standard linéaire .....	2.33
2.9.3	Remarque concernant $R(t)$ et $J(t)$ .....	2.35

### **3 ESSAIS HARMONIQUES**

---

3.1	GENERALITES .....	3.1
3.2	SOLLICITATION OSCILLATOIRE D'UN MATERIAU .....	3.2
3.2.1	Matériau élastique .....	3.2
3.2.2	Matériau visqueux (plastique) .....	3.3
3.2.3	Matériau viscoélastique .....	3.3
3.3	DEFINITIONS .....	3.5
3.4	COMPORTEMENT DYNAMIQUE POUR LE MODELE STANDARD LINEAIRE .....	3.6
3.4.1	Contrainte sinusoïdale .....	3.5
3.4.2	Déformation sinusoïdale .....	3.8
3.5	ENERGIE DISSIPÉE PAR CYCLE ET PAR UNITE DE VOLUME .....	3.10

3.6	REPRESENTATION COMPLEXE .....	3.11
3.7	RESUME DES FORMULES IMPORTANTES .....	3.13
3.7.1	Contrainte sinusoïdale.....	3.13
3.7.2	Déformation sinusoïdale.....	3.13
3.7.3	Energie dissipée par cycle et par unité de volume .....	3.13

## **4      MODELES DE RELAXATION ET BASES PHYSIQUES**

---

4.1	MODELE DE MAXWELL .....	4.2
4.2	MODELE DE MAXWELL GENERALISE .....	4.3
4.3	MODELE DE KELVIN (VOIGT) GENERALISE .....	4.4
4.4	MODELE COOPERATIF KWW (EXPONENTIEL ALLONGE) .....	4.4
4.5	SPECTRE DE TEMPS DE RELAXATION (STR) .....	4.5
4.6	CALCUL DU SPECTRE DE TEMPS DE RELAXATION .....	4.7
	<i>Approximation d'Alfred</i> .....	4.5
	<i>Approximation de Ferry &amp; Williams</i> .....	4.5
	<i>Approximation de Schwarzl &amp; Staverman</i> .....	4.5
4.7	MODELES PHYSIQUES .....	4.8
4.7.1	Modèle exponentiel (activation thermique) .....	4.8
4.7.2	Modèle exponentiel avec 'réaction' dans les deux sens .....	4.9

## **5      EQUIVALENCE TEMPS - TEMPERATURE**

---

5.1	COURBE MAITRESSE ET COEFFICIENT DE TRANSLATION $a_T$ .....	5.1
5.2	RELATION D'ARRHENIUS .....	5.3
5.3	RELATION ENTRE TEMPERATURE ET MOBILITE MOLECULAIRE .....	5.4
5.4	L'EQUATION WLF ET THEORIE DU VOLUME LIBRE .....	5.5
5.5	INFLUENCE DE LA PRESSION SUR LE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE .....	5.8

## **DEUXIEME PARTIE : RHEOLOGIE DES LIQUIDES**

### **6      CLASSES DE LIQUIDES**

---

6.1	CLASSIFICATION ET MISE EN ŒUVRE DES POLYMERES .....	6.1
6.1.1	Structure .....	6.1
6.1.2	Mise en œuvre .....	6.2

6.2	CLASSIFICATION DES COURBES D'ECOULEMENT .....	6.3
6.2.1	Fluides Newtoniens .....	6.3
6.2.2	Fluides non-Newtoniens .....	6.4
6.3	LA VISCOSITE .....	6.5
6.4	COURBE DE VISCOSITE DES POLYMERES : CAS GENERAL .....	6.6

## **7 RELATIONS CONSTITUTIVES**

7.1	EXEMPLES DE RELATIONS .....	7.1
7.1.1	Loi de puissance .....	7.2
7.1.2	Modèle de <i>Carreau</i> .....	7.3
7.1.3	Modèle de <i>Carreau-Yashuda</i> .....	7.4
7.1.4	Autres modèles .....	7.4
7.2	VISCOSITE EN FONCTION DE DIFFERENTS PARAMETRES .....	7.5
7.2.1	Vitesse de cisaillement .....	7.5
7.2.2	Temps de cisaillement .....	7.6
7.2.3	Poids moléculaire .....	7.7
7.2.4	Ajout de particules .....	7.8
7.2.5	Température et pression .....	7.8
7.3	CONCEPT DU VOLUME LIBRE APPLIQUE AUX LIQUIDES .....	7.11
7.3.1	Phénoménologie .....	7.11
7.3.2	Volume libre pour $\eta(T)$ et équation WLF.....	7.12
7.4	RESUME DES PRINCIPAUX MODELES .....	7.14
7.4.1	Loi de puissance .....	7.14
7.4.2	Modèle de <i>Carreau</i> .....	7.14
7.4.3	Modèle de <i>Carreau-Yashuda</i> .....	7.14
7.4.4	Modèle de <i>Cross</i> .....	7.14
7.4.5	Modèle de <i>Ellis</i> .....	7.14
7.4.6	Température .....	7.14
7.4.7	Pression .....	7.15
7.4.8	Equation WLF .....	7.15

## **8 ECOULEMENTS VISCOSIMETRIQUES**

8.1	INTRODUCTION .....	8.1
8.1.1	Ecoulements viscosimétriques types .....	8.1
8.1.2	Equations de conservation (fluides Newtoniens) .....	8.1
8.2	ECOULEMENTS VISCOSIMETRIQUES NEWTONIENS .....	8.3
8.2.1	Ecoulement de Poiseuille dans une conduite rectangulaire .....	8.3
8.2.2	Ecoulement en cisaillement simple entre plaques parallèles.....	8.5
8.2.3	Ecoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire .....	8.6
8.2.4	Variables d'écoulement d'un fluide newtonien .....	8.8
8.3	FLUIDES NON NEWTONIENS .....	8.11
8.3.1	Ecoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire.....	8.11
8.3.2	Ecoulement de Poiseuille dans une conduite rectangulaire .....	8.12

8.3.3	Variables d'écoulement d'un fluide non-Newtonien .....	8.13
8.3.4	Profils de vitesse d'écoulement .....	8.14
8.4	ANALYSE DIMENSIONNELLE .....	8.15
8.4.1	Principe fondamental .....	8.15
8.4.2	Théorème de Vaschy-Buckingham $\pi$ .....	8.16
8.4.3	Analyse dimensionnelle de la force de traînée .....	8.17

## **9 MESURES RHEOMETRIQUES**

---

9.1	RHEOMETRE CAPILLAIRE .....	9.1
9.1.1	Détermination de la viscosité .....	9.1
9.1.2	Correction de Bagley .....	9.2
9.1.3	Correction de Rabinowitsch .....	9.3
9.1.4	Avantages et inconvénients du rhéomètre capillaire .....	9.5
9.2	RHEOMETRE DE COUETTE .....	9.6
9.2.1	Détermination de la viscosité .....	9.6
9.2.2	Cas de fluides non-newtoniens .....	9.7
9.2.3	Avantages et inconvénients du rhéomètre de Couette .....	9.7
9.3	RHEOMETRE CONE – PLAQUE .....	9.8
9.3.1	Détermination de la viscosité .....	9.8
9.3.2	Avantages et inconvénients du rhéomètre cône – plaque .....	9.9
9.4	RHEOMETRE A PLAQUES PARALLELES .....	9.9
9.4.1	Détermination de la viscosité .....	9.10
9.4.2	Avantages et inconvénients du rhéomètre à plaques parallèles .....	9.11
9.5	EQUIVALENCE COX-MERZ .....	9.11

## **10 ECOULEMENTS TURBULENTS**

---

10.1	APPARIATION DE LA TURBULENCE .....	10.1
10.2	ANALYSE DE LA TURBULENCE .....	10.3
10.2.1	Hauteur piézométrique .....	10.3
10.2.2	Frottement .....	10.3
10.2.3	Résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent .....	10.4
10.2.4	Influence de la rugosité des parois .....	10.9
10.2.5	Diagramme de Moody .....	10.10
10.2.6	Conduites de section non circulaire .....	10.12
10.3	ECOULEMENT LIBRE AVEC CORPS IMMERGE ET COUCHE LIMITE .....	10.12
10.3.1	Définition de la couche limite .....	10.13
10.3.2	Equilibre des forces .....	10.13
10.3.3	Cas laminaire .....	10.15
10.3.4	Cas turbulent .....	10.16

## TROISIEME PARTIE : RHEOLOGIE DES FLUIDES COMPLEXES

### 11 CHEMORHEOLOGIE

---

11.1	INTRODUCTION .....	11.1
11.2	RAPPELS SUR LA RETICULATION DES THERMODURCISSABLES .....	11.2
11.2.1	Chimie de la réaction .....	11.2
11.2.2	Rhéologie de la réaction .....	11.4
11.3	MESURES RHEOLOGIQUES SUR DES SYSTEMES REACTIFS .....	11.5
11.3.1	Le problème .....	11.5
11.3.2	La méthode .....	11.6
11.3.3	Mesure du temps de gel .....	11.9
11.3.4	Mesure du temps de vitrification .....	11.10
11.4	LE DIAGRAMME T-T-T.....	11.10

### 12 PHENOMENOLOGIE DES SUSPENSIONS ET EMULSIONS

---

12.1	PHENOMENOLOGIE .....	12.1
12.1.1	Classification et typologie .....	12.1
12.1.2	Effets hydrodynamiques et formation de réseaux .....	12.2
12.2	INTERACTIONS ET STABILITE DES SUSPENSIONS .....	12.3
12.2.1	Forces de répulsion .....	12.4
12.2.2	Le mouvement brownien .....	12.5
12.2.3	Les interactions de van der Waals .....	12.6
12.2.4	Les interactions hydrodynamiques .....	12.6
12.2.5	Les forces électrostatiques .....	12.7
12.2.6	Coagulation et floculation .....	12.10
12.2.7	Bilan des forces d'interaction et théorie DLVO .....	12.11
12.2.8	Synthèse phénoménologique des écoulements de suspensions .....	12.12
12.3	EMULSIONS .....	12.13
12.3.1	Stabilité des émulsions .....	12.14
12.3.2	Inversion de phase .....	12.14
12.3.3	Exemple : la margarine .....	12.15

### 13 RHEOLOGIE DES SUSPENSIONS

---

13.1	SUSPENSIONS DE PARTICULES SPHERIQUES .....	13.1
13.1.1	Suspensions diluées .....	13.1
13.1.2	Suspensions semi-concentrées .....	13.2
13.1.3	Suspensions concentrées .....	13.4
13.2	AGREGATION ET SOLVATATION DES PARTICULES .....	13.6
13.2.1	Suspensions concentrées avec formation d'agrégats .....	13.6
13.2.1	Adsorption de solvant à la surface des particules (solvatation) .....	13.7

13.3	SUSPENSIONS DE PARTICULES NON-SPHERIQUES .....	13.8
13.3.1	Influence du rapport de forme .....	13.8
13.3.2	Suspensions de fibres .....	13.10
13.4	EFFETS DYNAMIQUES ET SEUIL D'ÉCOULEMENT .....	13.12
13.4.1	Seuil d'écoulement .....	13.12
13.3.2	Modes et exemples de comportement non-newtonien .....	13.14

## **14 ETUDE DE CAS**

---

14.1	LA PEINTURE .....	14.1
14.2	LE CHOCOLAT .....	14.2
14.3	LE FROMAGE .....	14.4
14.4	L'HEMORHEOLOGIE .....	14.6
14.5	BIORHEOLOGIE CELLULAIRE .....	14.9

## **15 PHENOMENES**

---

15.1	EFFET WEISSENBERG .....	15.1
15.2	GONFLEMENT DE FILIERE ( <i>DIE SWELL</i> ) .....	15.3
15.3	VORTEX .....	15.5
15.4	JET LIQUIDE EN FORME D'ARBRE .....	15.7
15.5	FLUX RADIAL DANS UNE CELLULE HELE-SHAW .....	15.8
15.6	JET CAPILLAIRE AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS ELEVE .....	15.9

## **LISTE DES SYMBOLES**

## PREAMBULE

*παντα ρει ...* tout s'écoule

La rhéologie est :

- *l'étude des processus de déformation continus et irréversibles dans le temps.*
- *la science des lois de comportement des matériaux qui lient à un instant donné les contraintes aux déformations (élasticité, plasticité, viscosité, etc.)*

Petit Larousse (1989)

On distingue trois champs d'application qui structurent ce document :

- les solides,
- les liquides,
- les liquides complexes, qui comprennent les fluides réactifs, les suspensions et les émulsions.



## BIBLIOGRAPHIE

Les éléments de ce cours sont couverts en plus de détails dans les ouvrages suivants, dont la consultation pendant le semestre est vivement conseillée :

- Batchelor, *An introduction to fluid dynamics*, Cambridge University Press, 1967 (reprinted 1994).
- Bird, Armstrong, Hassager, *Dynamics of polymeric liquids*, John Wiley & Sons, 1987.
- Macosko, *Rheology Principles, measurements, and applications*, VHC Publishers, Inc, 1994.
- Boger and Walters, *Rheological phenomena in focus*, Elsevier, 1993.
- Worlow, *Rheological techniques, 2nd edition*, Ellis-Horwood, 1992.
- Couarraze, Grossiord, *Initiation à la rhéologie, 2ème édition*, Lavoisier - Tec&Doc, 1991.
- Ferry, *Viscoelastic properties of polymers, 3rd edition*, John Wiley & Sons, 1980.
- Tanner, *Engineering rheology, revised edition*, Oxford science publications, 1988.
- Haddad, *Viscoelasticity of engineering materials*, Chapman & Hall, 1995.
- Krishnamatchari, *Applied stress analysis of plastics: A mechanical engineering approach*, Van Nostrand Reinhold, 1993.
- Advani, *Flow and rheology in polymer composites*, Vol. 10, Composite material series, Elsevier, 1994.



# 1 DEFINITIONS

## 1.1 COMPORTEMENTS ELASTIQUE, VISQUEUX ET VISCOELASTIQUE

Les matériaux sont traditionnellement décrits selon deux types de comportements idéaux : le comportement purement élastique d'une part et le comportement purement visqueux d'autre part. Nous considérons le cas d'une sollicitation en cisaillement pour traiter ces deux comportements.

### 1.1.1 Comportement élastique

Si un solide est soumis à une contrainte, il atteint un état d'équilibre :

- Sa réponse est indépendante du temps.
- Son comportement est défini par le module de cisaillement  $G$ , avec la loi :

$$\tau = G \gamma \quad (1.1)$$

où  $\tau$  est la contrainte de cisaillement ou cission et  $\gamma$  la déformation en cisaillement.

### 1.1.2 Comportement visqueux

Si un liquide est soumis à une contrainte, il se déforme continuellement dans le temps :

- Sa réponse dépend du temps d'application de la contrainte.
- Son comportement est défini par la viscosité  $\eta$ , avec la loi générale :

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (1.2)$$

où  $\dot{\gamma}$  est la vitesse de cisaillement. Dans le cas général d'un fluide,  $\eta$  est fonction de  $\dot{\gamma}$  :

$$\tau = \eta(\dot{\gamma}) \dot{\gamma} \quad (1.3)$$

Ces notions sont résumées dans le Tableau 1.1.

Tableau 1.1. Rappel des relations constitutives et géométriques pour l'état élastique et visqueux.

	Etat élastique	Etat visqueux
Relations constitutives	$\sigma = E\varepsilon$	$\tau = \eta \dot{\gamma}$ (fluide newtonien)
	$\tau = G\gamma$	$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}$ (fluide non newtonien)
Relations géométriques	$\sigma = F/A$	$\tau = \tau(p, \text{conditions externes})$
		$\eta = \eta(p, \text{conditions externes})$

### 1.1.3 Comportement viscoélastique

La plupart des matériaux réels comme ceux décrits au Tableau 1.2 ont un comportement qui se situe entre ces deux extrêmes. On parle alors d'un comportement viscoélastique.

visqueux ↔ viscoélastique ↔ élastique
---------------------------------------

Tableau 1.2. Exemples de domaines d'application de la rhéologie.

domaines	liquides	solides
<b>polymères</b>	- mise en œuvre (moulage, extrusion ...) - solution	- fluage - relaxation des contraintes
<b>métaux</b>	- mise en œuvre (coulée)	- fluage à haute température
<b>médecine</b>	- écoulement du sang	- déformation des os (avec l'âge)
<b>alimentaire</b>	- procédés (boissons, émulsions ...)	- résistance à la mastication

### 1.1.4 Diagrammes du comportement (approche "ingénieur")

Le comportement d'un matériau sous contrainte mécanique peut être représenté par divers diagrammes. Ces derniers permettent de mieux comprendre les phénomènes mis en jeu lors de l'application d'une contrainte et de décrire la réponse du matériau à long terme. Deux diagrammes caractéristiques de matériaux à comportement viscoélastique sont présentés ci-dessous.

### *Le diagramme élongation – temps (fluage)*

Des courbes d'élongation en fonction du temps sont obtenues pour différentes contraintes. Si on prend le montage décrit à la Figure 1.1a, il est possible d'obtenir le diagramme illustré à la Figure 1.1b selon la charge. La courbe reliant les extrémités des courbes de fluage correspond à la ligne de rupture.

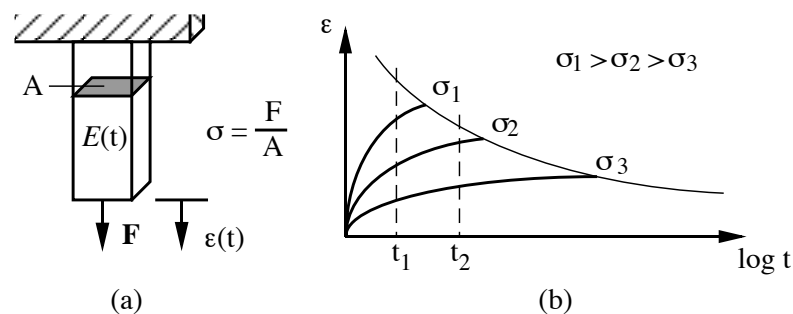


Figure 1.1. (a) Schéma d'un essai à charge imposée et (b) la réponse du matériau.

### *Le diagramme module de fluage – temps*

Le module effectif peut être défini comme le module de fluage. Il correspond à la pente de la courbe  $\sigma = f(\varepsilon)$ . Le diagramme module de fluage  $E_c - \log(\text{temps})$  permet d'étudier la variation du module en fonction du temps (Figure 1.2). Lorsqu'une construction est chargée, le module de fluage diminue en fonction du temps. Ainsi, après un temps  $t_2$ , l'ingénieur doit compter avec un module plus bas qu'après un temps  $t_1$ .

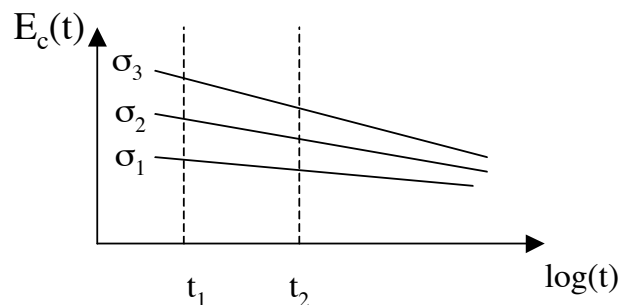


Figure 1.2. Variation du module de fluage  $E_c$  en fonction du temps.

## 1.2 TENSEUR DES CONTRAINTES

Les problèmes de rhéologie reliant contraintes et déformations sont généralement en 2 ou 3 dimensions, ce qui implique une approche tensorielle. Dans le tenseur des contraintes, les composantes  $\sigma_{ii}$  correspondent à des contraintes de traction/compression, alors que les composantes  $\sigma_{ik}$  (avec  $i \neq k$ ) correspondent à du cisaillement :

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

où les composantes du tenseur (système cartésien) sont représentées sur la Figure 1.3.

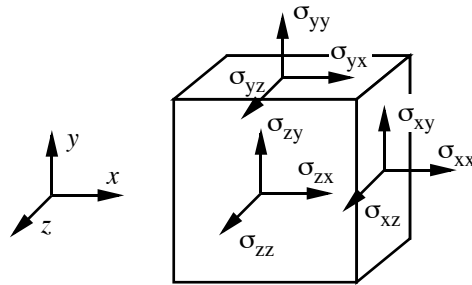


Figure 1.3. Représentation des composantes du tenseur des contraintes sur un élément cisailé.

### 1.2.1 Tenseurs hydrostatique et déviatorique

On peut décomposer le tenseur des contraintes en la somme d'un tenseur hydrostatique  $\boldsymbol{\sigma}_D$  et d'un tenseur de trace nulle, appelé tenseur déviatorique des contraintes :

$$\boldsymbol{\sigma}_M = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} = -P\mathbf{I} \quad (1.5)$$

où  $P$  représente une pression hydrostatique (le signe  $-$  est une convention)

$$\sigma_D = \sigma - \sigma_M \cdot \begin{pmatrix} \sigma_{xx} + p & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} + p & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

Ainsi, lors d'un cas de sollicitation en cisaillement simple sous une pression hydrostatique  $P$ , on peut déduire du tenseur des contraintes la partie déviatorique :

$$\sigma = \begin{pmatrix} -p & \tau_1 & 0 \\ \tau_2 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

avec  $\tau_1 = \tau_2$ , et donc :

$$\sigma_D = \sigma + P\mathbf{I} = \begin{pmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1.8)$$

### 1.2.2 Considérations analytiques pour les calculs des contraintes

Considérons le tenseur de contrainte :

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + P = s_{ij} + 1/3 \sigma_{ii} \quad \text{avec } i, j = 1, 2, 3 \quad (1.9)$$

où  $s$  est la contrainte déviatorique et  $P$  la pression hydrostatique qui vaut  $1/3(\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})$ . On peut décrire la contrainte déviatorique et la pression en utilisant des lois similaires à la loi de Hooke :

$$s_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} \quad (1.10)$$

$$P = 3K\varepsilon_h \quad (1.11)$$

où  $\varepsilon_h$  est la déformation volumique (hydrostatique).

Il existe quatre constantes qui décrivent le comportement élastique d'un matériau homogène, isotrope :  $E$ ,  $\nu$ ,  $G$  et  $K$ . Celles-ci sont reliées entre elles pour un matériau homogène isotrope. Notons que :

- $K$  donne la déformation volumique,
- $G$  donne la déformation à volume constant.

L'expérience montre que la déformation volumique ne varie pas dans le temps, tandis que la déformation à volume constant dépend du temps pour un matériau viscoélastique. On a :

$$E(t) = \frac{9KG(t)}{3K + G(t)} \quad \text{module de Young pseudoélastique} \quad (1.12)$$

$$\nu(t) = \frac{3K - 2G(t)}{2(3K + G(t))} \quad \text{coefficient de Poisson pseudoélastique} \quad (1.13)$$

L'hypothèse,  $\nu$  est constant, parfois utilisée n'est donc pas correcte. Lorsque  $G(t)$  tend vers 0,  $\nu$  tend vers 0.5 (cas d'un liquide incompressible).

### 1.3 CISAILLEMENT ET EXTENSION

#### 1.3.1 Cisaillement simple

La Figure 1.4 montre le cas du cisaillement dit *simple* d'un élément de matière d'épaisseur  $dy$  cisailé selon l'axe  $x$  de  $dx$  à la vitesse  $u_x$ .

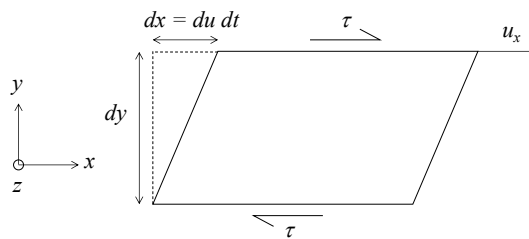


Figure 1.4. Géométrie du cisaillement simple.

Ce cisaillement résulte de l'application de forces  $F$  parallèles et opposées, appliquées sur les faces supérieure et inférieure de l'élément sur ses faces d'aire  $A$ , autrement dit à une contrainte en cisaillement  $\tau$  :



$$\tau = \frac{F}{A} \quad \text{en } [N/m^2] \equiv [Pa] \quad (1.14)$$

On définit également les grandeurs suivantes :

$$\text{- vitesse d'écoulement : } u = \frac{dx}{dt} \quad (1.15)$$

$$\text{- cisaillement : } \gamma = \frac{dx}{dy} \quad (1.16)$$

$$\text{- vitesse de cisaillement : } \dot{\gamma} = \frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{dx}{dy} = \frac{du}{dy} \quad (1.17)$$

La Figure 1.5 compare le cisaillement simple, unidimensionnel, avec celui du cas plus général, bidimensionnel. Ces schémas considèrent ce qui passe lors d'une déformation infinitésimale  $d\xi$  sur une longueur élémentaire  $\xi$ . On définit dans ce cas la déformation en cisaillement de la façon suivante :

$$\gamma = \frac{(\xi + d\xi) - \xi}{dy} = \frac{d\xi}{dy} \quad (1.18)$$

Si on considère le cas à deux dimensions, par un raisonnement analogue, on obtient les résultats suivants :

$$\gamma_{xy} = \frac{d\xi}{dy} + \frac{d\zeta}{dx} \quad (1.19)$$

avec  $\xi$  déplacement en  $x$  et  $\zeta$  déplacement en  $y$ .

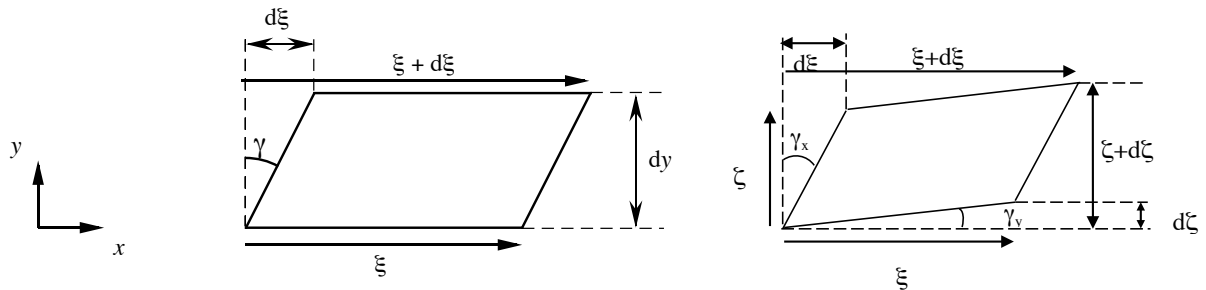


Figure 1.5. Description d'une déformation infinitésimale sur un élément lors d'un cisaillement simple (à gauche) et à deux dimensions (à droite).

Généralement, lors des problèmes rhéologiques, on est confronté à du cisaillement simple, qui est la façon la plus directe et la plus aisée de mesurer la viscosité d'un matériau. Il y a cependant des limitations : amplitude de déformation, vitesse de cisaillement restreinte ( $0.01 \text{ s}^{-1} < \dot{\gamma} < 50 \text{ s}^{-1}$ ), sensibilité de la mesure ....

Il est par ailleurs important de souligner que la définition de  $\dot{\gamma}$  est liée au choix du référentiel. Soit le cas de cisaillement simple représenté à la Figure 1.6 (la plaque supérieure est en mouvement, alors que la plaque inférieure reste fixe). Alors, un incrément  $dy > 0$  correspond à un incrément  $du > 0$ . Ainsi, le gradient de cisaillement (= pente de la droite du profil de vitesse) est positif :  $\dot{\gamma} = \frac{\partial u}{\partial y}$ . Par contre, si la contrainte de cisaillement est due au mouvement de la plaque inférieure, un incrément  $dy > 0$  correspond à un incrément  $du < 0$ . Dès lors le gradient de cisaillement est négatif. On définit alors parfois dans ce cas particulier  $\dot{\gamma}$  comme  $\dot{\gamma} = -\frac{\partial u}{\partial y}$ , afin qu'il soit positif, ou bien il arrive que certains prennent toujours la valeur absolue de la vitesse de cisaillement.

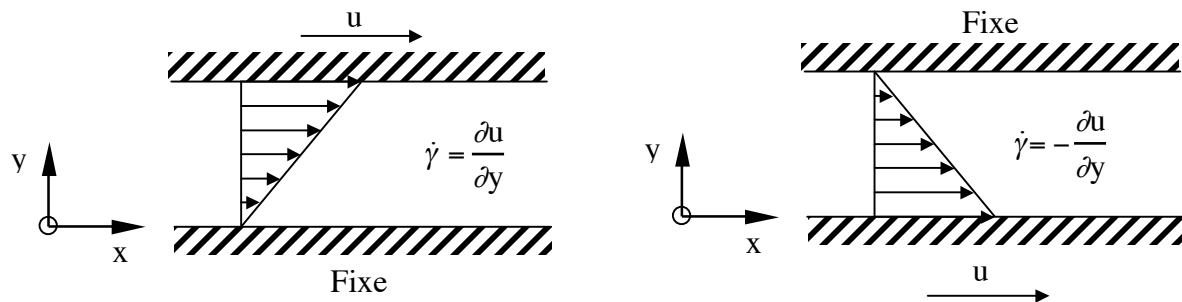


Figure 1.6. Représentation du profil de vitesse dans le cas d'un cisaillement simple provoqué par le mouvement de la plaque supérieure (gauche) ou de la plaque inférieure (droite).

### 1.3.2. Extension

Dans le cas d'un *écoulement en extension* décrit à la Figure 1.7 on a le champ de vitesse :

$$- \quad u_x = \dot{\epsilon} x \quad (1.20)$$

$$- \quad u_y = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} y \quad (1.21)$$

$$- \quad u_z = -\frac{\dot{\epsilon}}{2} z \quad (1.22)$$

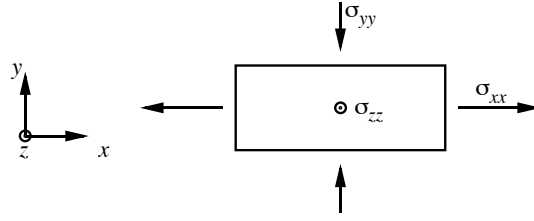


Figure 1.7. Élément sous un écoulement en extension.

La viscosité en extension  $\eta_E$  est alors définie par :

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = \sigma_{xx} - \sigma_{zz} = \dot{\epsilon} \eta_E(\dot{\epsilon}) \quad (1.23)$$

$$\sigma_{xy} = \sigma_{xz} = \sigma_{yz} = 0 \quad (1.24)$$

### 1.3.3 Fonctions matérielles

Un liquide viscoélastique se caractérise par trois fonctions matérielles, à savoir  $\eta$ ,  $N_1$ ,  $N_2$ .

Pour le cisaillement simple on a les relations suivantes :

$$\text{la viscosité en cisaillement : } \eta(\dot{\gamma}) = \sigma_{xy} / \dot{\gamma} = \tau / \dot{\gamma} \quad (1.25)$$

$$\text{la première différence normale : } N_1(\dot{\gamma}) = \sigma_{xx} - \sigma_{yy} \quad (1.26)$$

$$\text{la deuxième différence normale : } N_2(\dot{\gamma}) = \sigma_{yy} - \sigma_{zz} \quad (1.27)$$

$$\psi_1 = N_1 / \dot{\gamma}^2 \quad (1.28)$$

$$\psi_2 = N_2 / \dot{\gamma}^2 \quad (1.29)$$

On a, en général, les inégalités suivantes :

$$N_1 > 0 \quad (1.30)$$

$$N_2 < 0 \quad (1.31)$$

$$|N_1| \geq |N_2| \quad (1.32)$$

## 1.4 CAS DE SOLLICITATIONS

Nous distinguons divers types de sollicitations :

- le *fluage* où l'on mesure l'évolution de la déformation lorsque la contrainte  $\sigma$  est constante,
- la *relaxation des contraintes* lorsque la déformation  $\varepsilon$  est constante,
- la *recouvrance de la déformation* lorsqu'une contrainte constante  $\sigma_0$  est appliquée pendant un laps de temps fini, puis est supprimée,
- l'*effacement de la contrainte* lorsqu'une déformation constante  $\varepsilon_0$  est appliquée pendant un laps de temps fini, puis est supprimée.

### 1.4.1 Fluage

Il s'agit d'une déformation sous une contrainte appliquée constante. Le matériau va se déformer sous l'effet de la contrainte au cours du temps. Le fluage est décrit par l'expérience illustrée à la Figure 1.8. On applique une contrainte  $\sigma_0$  à une éprouvette et on observe une déformation qui varie au cours du temps.

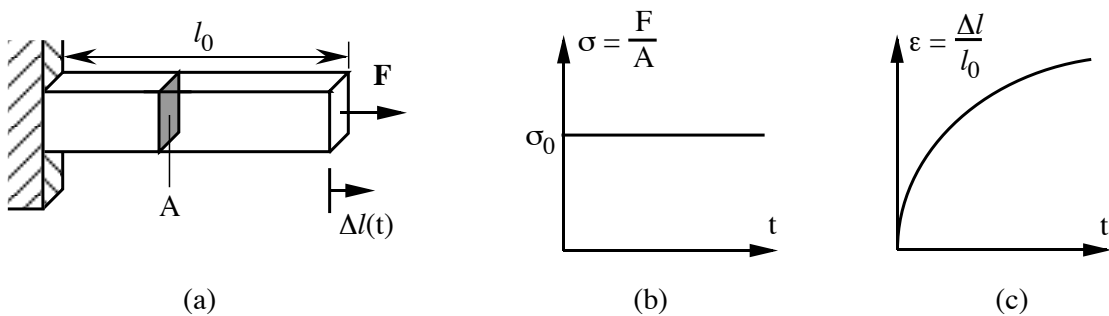


Figure 1.8. (a) Schéma d'un essai de fluage, (b) sollicitation du matériau et (c) sa réponse.

Le fluage est associé à la fonction de complaisance de fluage  $J(t)$  :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0} \quad (1.33)$$

La Figure 1.9 montre deux montages expérimentaux réalisables pour ce type d'essai.

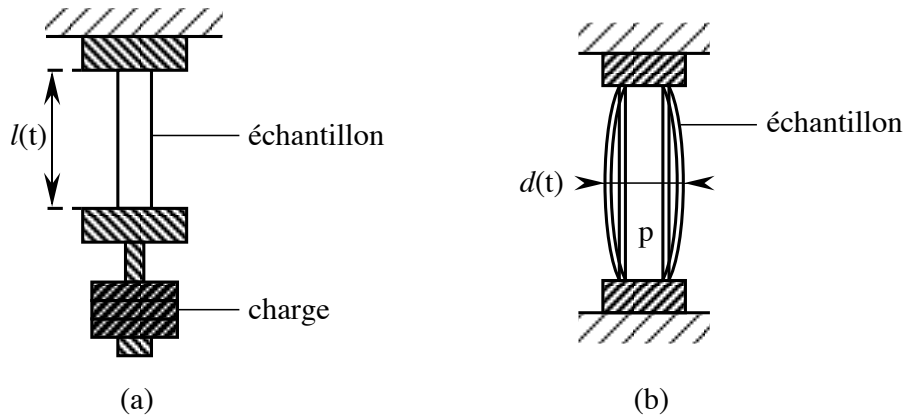


Figure 1.9. Essais de fluage en traction (a) et en appliquant une pression interne (b).

### 1.4.2 Relaxation de la contrainte

Ce cas de sollicitation consiste à appliquer au matériau une déformation  $\Delta l$  et de le laisser allongé, tel quel, comme schématisé à la Figure 1.10. Au cours du temps, une relaxation des contraintes va permettre une évolution de l'état initial.

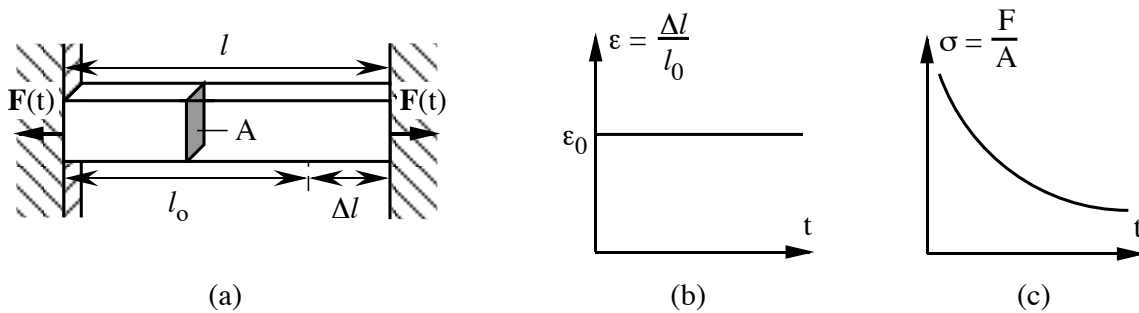


Figure 1.10. (a) Schéma d'un essai de relaxation, (b) la sollicitation du matériau et (c) sa réponse.

Comme précédemment, il convient d'introduire une fonction dite de relaxation  $R(t)$  qui décrit cette évolution au cours du temps :

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad (1.34)$$

### 1.4.3 Recouvrance de la déformation

Ce type de sollicitation se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on fait fluer le matériau, puis dans un second temps, on retire la contrainte. L'état de la contrainte est décrit à la Figure 1.11.

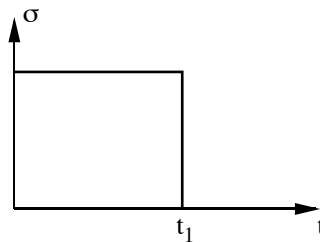


Figure 1.11. Profil de la sollicitation lors d'un essai de recouvrance de la déformation.

On observe alors une diminution de la déformation résultant de la suppression de la contrainte. La déformation observée est schématisée à la Figure 1.12 (cette représentation fait appel au principe de superposition de Boltzmann qui sera vu au Chapitre 3). Notons qu'il existe une recouvrance instantanée due à la réponse élastique du matériau qui n'est pas décrite dans la figure.

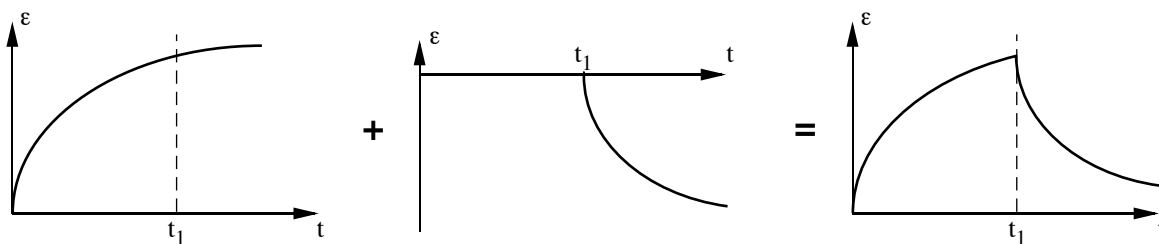


Figure 1.12. Description et décomposition de la réponse du matériau à un essai de recouvrance de la déformation.

### 1.4.4 Effacement de la contrainte

Ce type de sollicitation se fait en deux étapes. Dans un premier temps, on impose une déformation constante à un matériau, puis on sollicite ce matériau de façon à ce qu'il retrouve sa longueur initiale. La sollicitation et la réponse du matériau sont illustrées à la Figure 1.13.

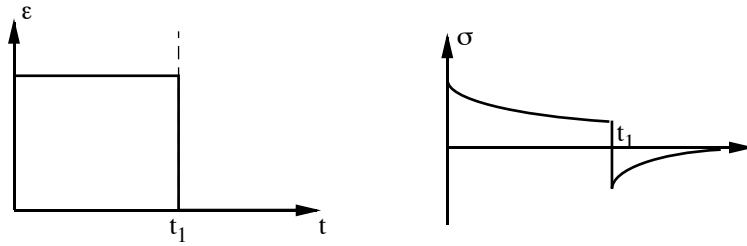


Figure 1.14. Sollicitation (courbe de gauche) et réponse (courbe de droite) du matériau à un essai d'effacement de la contrainte.

### 1.4.5 Cas général

Un matériau viscoélastique n'a pas exactement le comportement décrit au paragraphes précédents à cause de sa réponse élastique. Dans le cas par exemple d'un essai de recouvrance de la déformation, le matériau adopte le comportement décrit à la Figure 1.14.

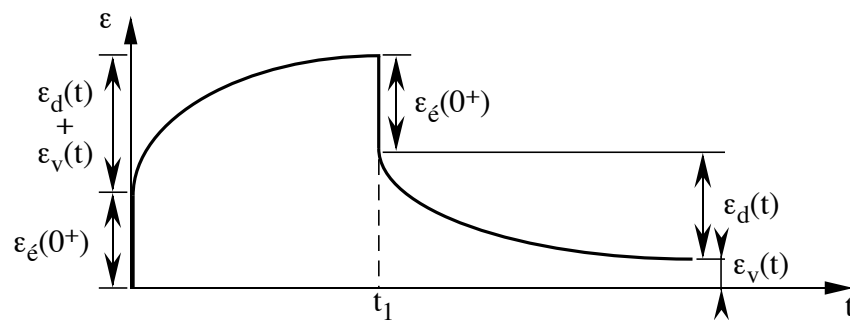


Figure 1.14. Description de la réponse d'un matériau viscoélastique à un essai de recouvrance de la déformation.

On peut décomposer, comme l'indique la figure, le comportement en trois parties. Chaque partie à un comportement qui lui est propre. Ces parties sont les suivantes :

- *Déformation élastique instantanée*  $\varepsilon_e(0^+)$  : cette déformation est réversible et disparaît lorsque la contrainte est supprimée.
- *Déformation élastique retardée*  $\varepsilon_d(t)$  : cette déformation est également élastique mais sa recouvrance totale demande du temps. Cette déformation est aussi appelée fluage primaire.
- *Ecoulement visqueux*  $\varepsilon_v(t)$  : cette déformation est irréversible et elle est appelée également fluage secondaire. Si on effectue un essai de recouvrance, la déformation après un temps infini correspondra au fluage secondaire.

## 1.5 VISCOSITE ET NOMBRES ADIMENSIONNELS

### 1.5.1 Viscosité

Il existe plusieurs définitions de la viscosité selon son utilisation, que l'on retrouvera aux Chapitres 6 et suivants.

#### *Viscosité dynamique $\eta$*

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad [1 \text{ Pa}\cdot\text{s} = 10 \text{ P}] \quad (\text{P} = \text{Poise}) \quad (1.35)$$

$$\eta = f(T, p, \dot{\gamma}, \tau)$$

C'est la relation usuelle qui permet de suivre la variation de la résistance à la déformation d'un matériau en fonction de la contrainte appliquée ou de la vitesse de cisaillement.

#### *Viscosité cinématique $\nu$*

$$\nu = \frac{\eta}{\rho} \quad [1 \text{ m}^2/\text{s} = 10^4 \text{ St}] \quad (\text{St} = \text{Stokes}) \quad (1.36)$$

Pour certains problèmes, il peut être utile d'avoir un symbole représentant la viscosité divisée par la masse spécifique du fluide.

#### *Viscosité relative $\eta_{rel}$*

$$\eta_{rel} = \frac{\eta}{\eta_0} \quad (1.37)$$

où  $\eta$  est la viscosité d'une suspension de particules dans un solvant et  $\eta_0$  est la viscosité du solvant. On utilise cette viscosité en rhéologie des suspensions pour quantifier les effets hydrodynamiques de suspensions en solution (remarque : c'est une viscosité adimensionnelle).



**Viscosité spécifique  $\eta_{sp}$** 

$$\eta_{sp} = \frac{\eta - \eta_0}{\eta_0} = \eta_{rel} - 1 \quad (1.38)$$

Cette viscosité a la même fonction que la précédente (remarque : c'est une viscosité adimensionnelle).

**Viscosité intrinsèque  $[\eta]$** 

$$[\eta] = \lim_{\substack{c \rightarrow 0 \\ \dot{\gamma} \rightarrow 0}} \eta_{sp} \quad (1.39)$$

où  $c$  représente la concentration de la suspension (remarque : cette valeur est généralement utilisée en chimie).

**1.5.2 Nombres adimensionnels**

Les nombres adimensionnels sont des rapports entre deux grandeurs de mêmes unités, introduits dans le cadre de la mécanique des fluides, et que l'on retrouvera dans l'ensemble du polycopié.

**Nombre de Reynolds**

On définit le nombre de Reynolds  $Re$  pour des liquides à viscosité  $\eta$  constante :

$$Re = \frac{\rho V d}{\eta} \quad (1.40)$$

où  $\rho$  est la densité,  $V$  la vitesse caractéristique du fluide et  $d$  une dimension caractéristique de la géométrie de l'écoulement. Le nombre de Reynolds donne le rapport entre les forces d'inertie et les forces visqueuses dans un écoulement.

***Nombre de Weissenberg***

Le nombre de Weissenberg  $We$  est défini comme :

$$We = \lambda \frac{V}{d} \quad (1.41)$$

Dans cette relation,  $\lambda$  est le temps caractéristique du fluide et vaut :

$$\lambda = \frac{N_1}{2\tau\dot{\gamma}} \quad (1.42)$$

$V/d$  est un temps caractéristique du procédé d'écoulement. Ce nombre est une expression de la vitesse de cisaillement et de l'amplitude de déformation.

***Nombre de Deborah***

Le nombre de Deborah  $De$  est une mesure de l'importance relative de l'élasticité dans le processus particulier d'un écoulement lent. L'origine de son nom vient d'une citation se trouvant dans la Bible (le cantique de Deborah, Juges 5.5) '*Les montagnes ruissellent devant Dieu*'. Ce nombre est défini comme valant :

$$De = \frac{\lambda}{\varsigma} \quad (1.43)$$

où  $\varsigma$  est le temps caractéristique du procédé d'écoulement, et  $\lambda$  le temps caractéristique représentatif du liquide. Comme ce nombre mesure l'importance relative des effets élastiques par rapport aux effets visqueux, on peut considérer les deux cas limites. Pour un solide élastique, le nombre de Deborah tend vers l'infini, tandis que pour un fluide visqueux newtonien, il vaut 0. Pour le cas intermédiaire où la viscoélasticité est très prononcée, le nombre de Deborah va tendre vers 1.

***Nombre de Trouton***

On définit le rapport de Trouton  $T_R$  comme le rapport entre la viscosité d'élongation et la viscosité de cisaillement. La viscosité d'élongation ou d'extension est aussi appelée viscosité de Trouton. Ce nombre vaut :

$$T_R = \frac{\eta_E}{\eta} \tag{1.44}$$

Pour des liquides newtoniens, ce rapport vaut 3. Pour des solutions de polymères à masse moléculaire élevée, il est compris entre 10 et  $10^4$ .

---



**PREMIERE PARTIE**  
**RHÉOLOGIE DES SOLIDES**

---

## 2 MODELES MECANQUES ET PRINCIPE DE BOLTZMANN

### 2.1 REPRESENTATION DU FLUAGE

La représentation graphique du comportement de matériaux sous contrainte permet de faciliter la recherche des lois permettant de décrire, voire de prédire ce comportement.

#### 2.1.1 Courbe idéalisée pour une contrainte constante

Prenons, par exemple, le cas du fluage préalablement décrit au paragraphe 1.4.1. On peut alors tracer le graphique élongation - temps montré à la Figure 2.1.

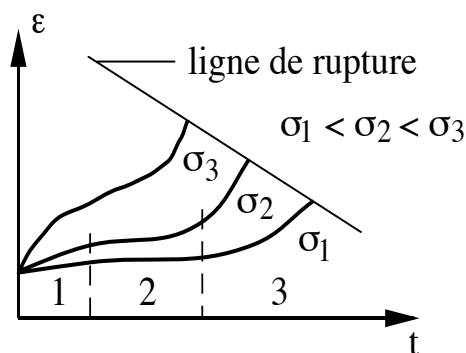


Figure 2.1. Graphique élongation - temps pour un essai de fluage à différentes contraintes.

La réponse à la contrainte  $\sigma$  peut être divisée en trois zones :

- 1) *fluage primaire* : représente la région où la vitesse de fluage diminue. L'écrouissage du matériau est dominant dans le cas des métaux.
- 2) *fluage secondaire* : région où l'écrouissage est compensé par la restauration. Pour cette raison, la vitesse de fluage est plus ou moins constante.
- 3) *fluage tertiaire* : région où l'affaiblissement structural de la résistance par la formation d'un endommagement microstructural devient important. C'est le dernier stade avant la rupture.

Afin de mieux comprendre ce que sont réellement ces zones, il convient d'étudier la Figure 2.2 qui décrit le logarithme de la vitesse de fluage en fonction de l'élongation. Ce graphique

est en fait un plan de phase (voir K. Arbenz, A. Wohlhauser, *Analyse numérique*, PPUR, Lausanne, 1990).

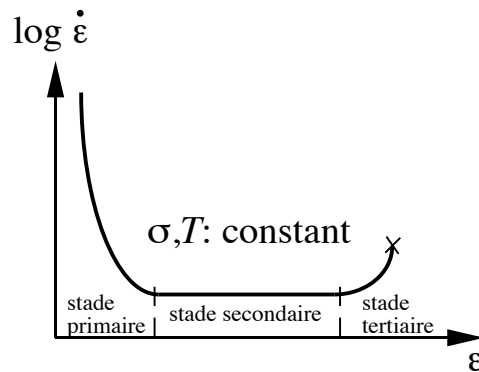


Figure 2.2. Représentation de la vitesse de déformation en fonction de la déformation.

### 2.1.2 Courbes de fluage

La Figure 2.3 montre des courbes de fluage fournissant des informations utiles pour la vie du matériau sous contrainte. Ces courbes nous donnent les relations entre la déformation, la contrainte et le temps nécessaire pour atteindre un certain état, c'est-à-dire que connaissant deux des trois paramètres, on peut déterminer le troisième.

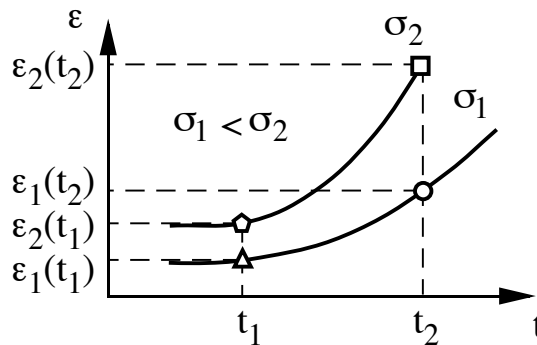


Figure 2.3. Courbes de fluage à différentes contraintes.

Par exemple, on peut chercher le temps nécessaire pour obtenir une déformation donnée pour différentes contraintes appliquées ; on peut aussi déterminer la contrainte admissible que l'on peut appliquer à une structure pour un temps d'utilisation et une déformation fixés ; ou encore, il est possible de trouver la déformation après un temps de sollicitation et une contrainte donnés.



### 2.1.3 Courbes des modules de fluage

Les modules de fluage sont le rapport entre les contraintes et les déformations :

$$E_{ci}(t) = \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i(t)} \quad (2.1)$$

On constate qu'ils varient avec le temps lors d'une sollicitation à contrainte constante (fluage). Leurs variations sont représentées sur la Figure 2.4 qui est un diagramme module - temps.

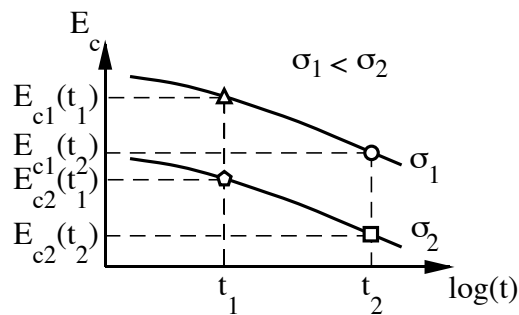


Figure 2.4. Courbes des modules de fluage à différentes contraintes.

Ce graphique peut être construit à partir des courbes de fluage (paragraphe précédent). Les quatre marques présentes sur les Figures 2.3 et 2.4 correspondent entre elles. On note deux observations :

- $E_c$  diminue lorsque la charge augmente
- $E_c$  diminue lorsque le temps augmente

### 2.1.4 Courbes (isochrones) contrainte - déformation

Les courbes isochrones sont une troisième représentation graphique du fluage comme le montre la Figure 2.5. Ces graphes, contrairement aux deux autres, se lisent horizontalement ou verticalement et représentent la contrainte en fonction de la déformation pour différents temps de sollicitation.

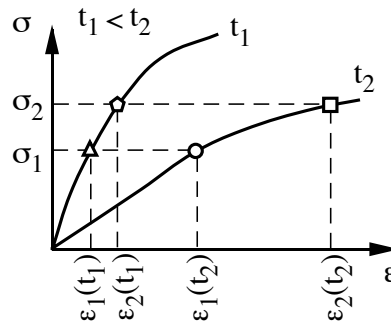


Figure 2.5. Courbes isochrones à différents temps. (Attention, ces graphes se lisent horizontalement ou verticalement).

Comme précédemment, il est possible de tracer ces graphes à partir des courbes de fluage. On a également représenté sur ces courbes isochrones les points équivalents pour les trois Figures 2.3, 2.4 et 2.5.

### 2.1.5 Représentation mathématique

La modélisation des courbes de fluage peut se faire à l'aide de fonctions mathématiques. Une des nombreuses possibilités existantes consiste à utiliser la loi de puissance. Ainsi la déformation peut être décrite par le modèle empirique de Findley :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 + mt^n \quad (2.2)$$

Les constantes  $\varepsilon_0$ ,  $m$  et  $n$  dépendent de plusieurs facteurs tels que :

- le matériau,
- la contrainte appliquée,
- la température.

Le fluage secondaire caractérisé par la déformation  $\varepsilon_s$  a souvent un taux de déformation  $d\varepsilon/dt$  constant, mais dépendant de la contrainte. Il peut se caractériser par une loi du type :

$$\varepsilon_s(t) = At\sigma^b \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon}_s = A\sigma^b \quad (2.3)$$

Les constantes  $A$  et  $b$  dépendent des facteurs suivants :

- le matériau,
- la température.

### 2.1.6 Une équation généralisée

Il serait intéressant et surtout pratique de pouvoir obtenir une relation décrivant au mieux le comportement global des matériaux au fluage. Une équation semi-empirique valable pour toute la plage de fluage est donnée par la somme des diverses composantes propres à chaque zone :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + B\sigma^n[1 - \exp(-t)] + Dt\sigma^4 \quad (2.4)$$

Cette expression est représentée sur la Figure 2.6. Les divers termes correspondent à différentes expressions pour l'élongation sous certaines conditions. Il s'agit de :

- Loi de Hooke :  $\varepsilon = \sigma_0/E$  (2.5)

- Fluage du modèle de Kelvin :  $\varepsilon(t) = \sigma_0/E(1 - \exp(-t/\tau))$  (2.6)

(Le modèle de Kelvin sera étudié au Chapitre 3)

- Fluage secondaire :  $\varepsilon_s(t) = At\sigma^B$  (2.7)

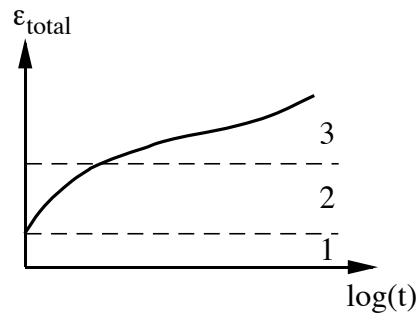


Figure 2.6. Représentation de l'expression semi-empirique (2.4).

## 2.2 REPRESENTATION DIFFERENTIELLE DU COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE

Pour décrire le comportement d'un matériau, il est nécessaire d'avoir à disposition des modèles représentant son comportement avec une bonne précision. La description générale d'une équation constitutive viscoélastique linéaire relie la contrainte à la déformation selon la relation :

$$P\sigma(t) = Q\varepsilon(t) \quad (2.8)$$

Cette relation est l'équation de base permettant de caractériser le comportement d'un matériau, où  $P$  et  $Q$  sont des opérateurs différentiels linéaires définis tels que :


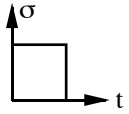
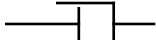
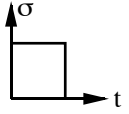
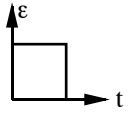
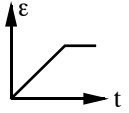
$$P = \sum_{i=0}^p a_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad \text{et} \quad Q = \sum_{i=0}^q b_i \frac{\partial^i}{\partial t^i} \quad (2.9)$$

où  $a$  et  $b$  sont des constantes propres au matériau. Le nombre de constantes  $a_i, b_i$  dépend de la réponse viscoélastique du matériau.

$$a_0 \sigma + a_1 \frac{d\sigma}{dt} + a_2 \frac{d^2\sigma}{dt^2} + \dots = b_0 \varepsilon + b_1 \frac{d\varepsilon}{dt} + b_2 \frac{d^2\varepsilon}{dt^2} + \dots \quad (2.10)$$

Dans la plupart des applications, deux ou trois termes suffisent à décrire le comportement avec précision. Concrètement, les opérateurs différentiels peuvent être assimilés à des éléments mécaniques: des ressorts ou des amortisseurs, afin de décrire un comportement élastique, viscoélastique ou visqueux (Tableau 2.1). Le ressort décrit un matériau élastique, l'amortisseur un matériau visqueux. Seule la combinaison de plusieurs de ces éléments permet de décrire le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire.

Tableau 2.1 Présentation des éléments de base, c'est-à-dire le ressort caractérisant la contribution élastique et l'amortisseur correspondant à la contribution visqueuse.

ressort		amortisseur	
			
$\sigma_r = E\varepsilon_r$		$\sigma_a = \eta \frac{d\varepsilon_a}{dt}$	

Les relations décrites dans le Tableau 2.1 peuvent être reliées à l'équation générale vue à la page précédente. Pour le ressort, il suffit de poser :

$$P = 1 \quad \text{et} \quad Q = E \quad (\Rightarrow b_0 = E) \quad (2.11)$$

On peut procéder de même avec l'amortisseur. Ces modèles peuvent être étendus à des modèles en trois dimensions, mais ceux-ci deviennent très complexes et nécessitent de longs calculs. On se limitera dans ce cours à des modèles unidimensionnels.

### 2.3 LE MODELE DE MAXWELL

Le modèle de Maxwell réunit un ressort et un amortisseur comme décrit à la Figure 2.7.

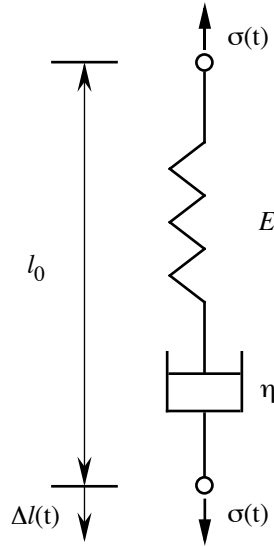


Figure 2.7. Représentation schématique du modèle de Maxwell.

Les éléments “mécaniques” sont montés en série, ce qui donne les relations suivantes :

$$\text{- pour la déformation : } \varepsilon(t) = \frac{\Delta l(t)}{l_0} = \varepsilon_r(t) + \varepsilon_a(t) \Rightarrow \frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{d\varepsilon_r(t)}{dt} + \frac{d\varepsilon_a(t)}{dt} \quad (2.12)$$

$$\text{- pour la contrainte : } \sigma(t) = \sigma_r(t) = \sigma_a(t) \quad (2.13)$$

En remplaçant les valeurs des déformations des éléments constitutifs par leurs expressions en fonction de la contrainte, on obtient :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (2.14)$$

Ce résultat peut être obtenu en remplaçant les constantes de l'équation générale (2.9) par les valeurs suivantes :

$$p = 1 : a_0 = 1/\eta \quad \text{et} \quad a_1 = 1/E \quad (2.15)$$

$$q = 1 : b_0 = 0 \quad \text{et} \quad b_1 = 1 \quad (2.16)$$

### 2.3.1 Fluage (Maxwell)

Les conditions pour ce type d'expériences sont :

$$- \sigma = 0 \quad \text{pour} \quad t < 0 \quad (2.17)$$

$$- \sigma = \sigma_0 \quad \text{et} \quad \frac{d\sigma}{dt} = 0 \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad (2.18)$$

Par la relation (2.14), on trouve :

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \frac{\sigma_0}{\eta} \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad (2.19)$$

En intégrant, on trouve la relation suivante :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + C \quad \text{où} \quad C \text{ est une constante d'intégration.} \quad (2.20)$$

En utilisant les conditions initiales définies comme étant :

$$t(0^+) \Rightarrow \varepsilon(0) = \varepsilon_0 = \frac{\sigma_0}{E} \quad (2.21)$$

on trouve la relation propre au fluage du modèle de Maxwell :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E} = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{E}{\eta} t \right) = J(t) \cdot \sigma_0 \quad (2.22)$$

On définit alors la fonction  $J(t)$ , appelée *fonction de complaisance* de fluage, comme décrit à la page 1.12.  $J(t)$  est dans ce cas :

$$J(t) = E^{-1} \left( 1 + \frac{t}{\tau_\sigma} \right) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E} \frac{t}{\tau_\sigma} = J + J_V(t) \quad \text{avec} \quad \tau_\sigma = \frac{\eta}{E} \quad (2.23)$$

$\tau_\sigma$  est défini comme étant le *temps de retard* pour l'élément de Maxwell.

Le fluage est donc décrit par la Figure 2.8. Le modèle de Maxwell n'est pas bon pour prédire un fluage.

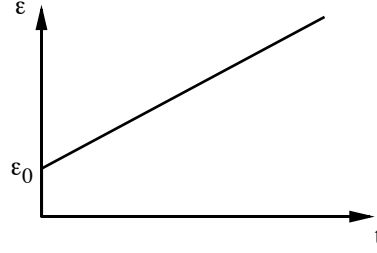


Figure 2.8. Prédiction par le modèle de Maxwell de la réponse d'un matériau viscoélastique à un essai de fluage. Le modèle semble inadapté à ce type de sollicitation (cf. Figure 1.9).

### 2.3.2 Relaxation (Maxwell)

En utilisant la relation 2.14 et la condition de la sollicitation ( $\varepsilon = \text{constante}$ ,  $\dot{\varepsilon} = 0$ ), on a :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (2.24)$$

La relation devient :

$$\frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = \tau_\varepsilon \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E} \quad (2.25)$$

On définit  $\tau_\varepsilon$  comme étant le *temps de relaxation* pour l'élément de Maxwell et l'on pose les conditions initiales qui sont:  $\sigma = \sigma_0$  à  $t = 0$ , on aboutit à :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right\} = \varepsilon_0 E \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right\} = \varepsilon_0 R(t) \quad \text{où} \quad R(t) = R_v(t) = E \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right\} \quad (2.26)$$

où  $R(t)$  est la *fonction de relaxation* comme définie au paragraphe 1.6.2. La relaxation de la contrainte est représentée à la Figure 2.9.

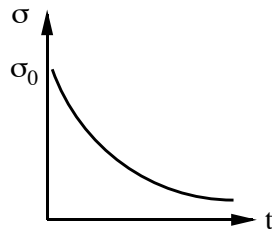


Figure 2.9. Prédiction par le modèle de Maxwell de la réponse d'un matériau viscoélastique à un essai de relaxation. Le modèle semble adapté à ce type de sollicitation.

### 2.3.3 Recouvrance de la déformation (Maxwell)

En observant les éléments constitutifs du modèle (Figure 2.7), on remarque que, lors de la sollicitation de recouvrance de la déformation (cf. Chapitre 1), le ressort retrouve sa longueur initiale, tandis que l'amortisseur garde celle qu'il avait lorsqu'on a supprimé la charge. Par conséquent, le modèle de Maxwell ne décrit pas un comportement viscoélastique pour ce type de sollicitation.

## 2.4 LE MODELE DE KELVIN (VOIGT)

Dans ce modèle, on positionne les éléments comme le montre la Figure 2.10.

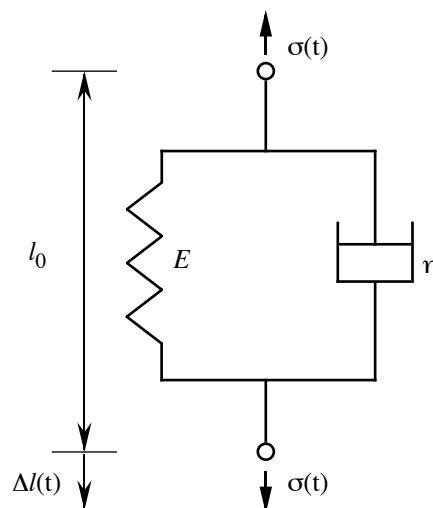


Figure 2.10. Représentation schématique du modèle de Kelvin.

Les éléments “mécaniques” sont montés en parallèle, ce qui nous donne :



$$- \text{ pour la déformation : } \varepsilon(t) = \frac{\Delta l(t)}{l_0} = \varepsilon_r(t) = \varepsilon_a(t) \quad (2.27)$$

$$- \text{ pour la contrainte : } \sigma(t) = \sigma_r(t) + \sigma_a(t) \quad (2.28)$$

On trouve la relation propre au modèle de Kelvin :

$$\sigma = E\varepsilon_r + \eta \frac{d\varepsilon_a}{dt} \quad (2.29)$$

Ce résultat est obtenu en mettant les valeurs ci-dessous dans l'équation générale 2.10 :

$$p = 1 : a_0 = 1 \quad \text{et} \quad a_1 = 0 \quad (2.30)$$

$$q = 1 : b_0 = E \quad \text{et} \quad b_1 = \eta \quad (2.31)$$

### 2.4.1 Fluage (Kelvin)

En procédant de manière identique au paragraphe 2.3.1, on trouve la relation suivante :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} + C \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \quad \text{où } C \text{ est une constante d'intégration} \quad (2.32)$$

Avec les conditions initiales:  $\varepsilon_0 = \varepsilon(0) = 0$  à  $t = 0$ , on obtient :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\sigma}\right\} \right] = J(t)\sigma_0 \quad \text{avec} \quad \tau_\sigma = \frac{\eta}{E} \quad \text{et} \quad J(t) = \frac{1}{E} + \frac{1}{E} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\sigma}\right\} = J + J_v(t) \quad (2.33)$$

Notons que la fonction de complaisance  $J(t)$  diffère de celle du modèle de Maxwell. De nouveau, on définit  $\tau_\sigma$  comme étant le temps de retard pour l'élément de ce modèle, et il vaut  $\eta/E$ . On peut représenter le fluage à la Figure 2.11.

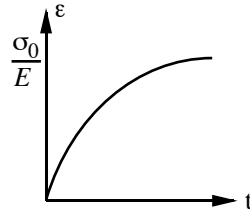


Figure 2.11. Prédiction par le modèle de Kelvin de la réponse d'un matériau viscoélastique linéaire lors d'un essai de fluage. Ce modèle semble bien approprié pour ce type de sollicitation.

### 2.4.2 Relaxation (Kelvin)

En utilisant la relation constitutive du modèle de Kelvin et la condition de la relaxation  $\varepsilon = \text{constante}$  (d'où  $\dot{\varepsilon} = 0$ ), on décrit la relaxation d'un simple élément élastique. Le ressort et l'amortisseur vont se trouver en équilibre ce qui se traduit par l'expression :

$$\sigma(t) = E\varepsilon_r \quad (2.34)$$

### 2.4.3 Recouvrance de la déformation (Kelvin)

Les conditions de cette expérience ( $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ ) nous amènent à l'expression :

$$E\varepsilon + \eta \frac{d\varepsilon}{dt} = 0 \quad (2.35)$$

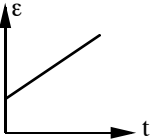
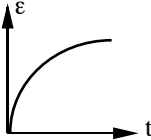
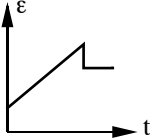
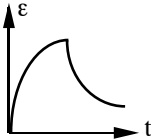
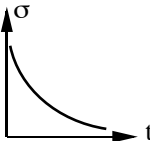
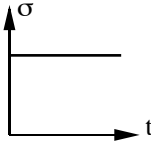
Donc, on obtient la relation suivante :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \quad \text{où} \quad \tau_\sigma \text{ est le temps retard et il vaut } \eta/E \quad (2.36)$$

## 2.5 RESUME MAXWELL/KELVIN

Toutes les relations trouvées dans les paragraphes précédents concernant le modèle de Maxwell et celui de Kelvin sont résumées dans le Tableau 2.2.

Tableau 2.2. Résumé des considérations faites sur les modèles de Maxwell et Kelvin pour les trois différents types de sollicitations (fluage, relaxation de la contrainte et recouvrance de la déformation).

	Modèle de Maxwell	Modèle de Kelvin
Fluage	$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{t}{\tau_\sigma} \right)$  <p>ne montre pas de fluage fini MAUVAIS</p>	$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \right]$  <p>montre un fluage fini BON</p>
Recouvrance	$\varepsilon(t) = \text{constante}$  <p>ne décrit pas la recouvrance MAUVAIS</p>	$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right)$  <p>BON</p>
Relaxation	$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right)$  <p>décrit la relaxation, mais la courbe tend vers 0 lorsque t tend vers l'infini. BON</p>	$\sigma(t) = \text{constante}$  <p>décrit un élément élastique MAUVAIS</p>

## 2.6 LE MODELE STANDARD LINEAIRE (SLSM : STANDARD LINEAR SOLID MODEL)

Ce modèle permet de décrire tous les comportements étudiés jusqu'à présent. Il est composé d'un modèle de Kelvin mis en série avec un ressort comme représenté à la Figure 2.12.

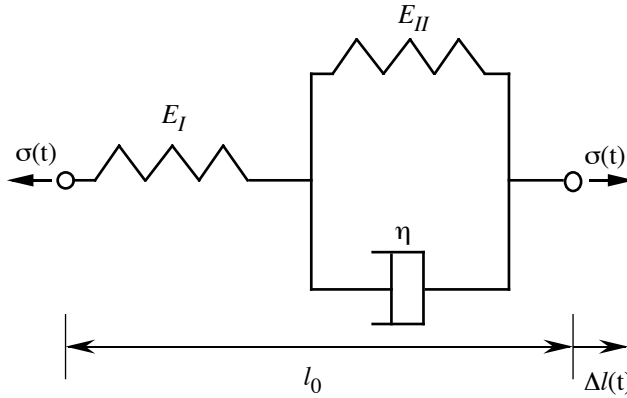


Figure 2.12. Représentation schématique du modèle standard linéaire.

Les relations constitutives propres à chacun des deux éléments sont :

$$\sigma_I = E_I \varepsilon_I \quad \text{et} \quad \sigma_{II} = E_{II} \varepsilon_{II} + \eta \dot{\varepsilon}_{II} \quad (2.37)$$

Les indices I et II se rapportent aux ressorts I et II. On n'arrive pas à résoudre cette équation directement, car on a affaire à  $\varepsilon$  et  $d\varepsilon/dt$ . Une méthode pratique et élégante pour résoudre ce problème est de passer par la transformée de Laplace. Les explications de base sur cet outil sont données en annexe, section 2.8. On a donc (pour les indices I et II) :

$$\begin{aligned} L(\sigma(t)) &= \bar{\sigma}(s) \\ L(\varepsilon(t)) &= \bar{\varepsilon}(s) \end{aligned} \quad (2.38)$$

En posant  $\varepsilon_{II} + \varepsilon_I = \varepsilon$ , on trouve :

$$L(\sigma(t)) = E_I L(\varepsilon_I) = E_{II} L(\varepsilon_{II}) + \eta [s L(\varepsilon_{II}) - \varepsilon(0)] \quad \text{avec} \quad \varepsilon(0) \rightarrow 0 \quad (2.39)$$

$$\bar{\sigma}(s) = E_I \bar{\varepsilon}_I = E_{II} \bar{\varepsilon}_{II} + \eta s \bar{\varepsilon}_{II} \quad (2.40)$$

De plus :

$$\bar{\varepsilon}_{II} + \bar{\varepsilon}_I = \bar{\varepsilon} \Rightarrow \bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{E_I} + \frac{\bar{\sigma}}{E_{II} + \eta s} \quad (2.41)$$

Donc :

$$\bar{\varepsilon} = \bar{\sigma} \left( \frac{E_I + E_{II} + \eta s}{E_I (E_{II} + \eta s)} \right) \quad (2.42)$$

$$\bar{\sigma} (E_I + E_{II}) + \bar{\sigma} \eta s = \bar{\varepsilon} E_I E_{II} + \bar{\varepsilon} E_I \eta s \quad (2.43)$$

En appliquant Laplace inverse :

$$\sigma (E_I + E_{II}) + \eta \frac{d\sigma}{dt} = E_I E_{II} \varepsilon + E_I \eta \frac{d\varepsilon}{dt} \quad (2.44)$$

On retrouve ici l'équation de base 2.10 du paragraphe 2.2. On retiendra la relation générale pour le SLSM :

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = E_R \varepsilon + E_I \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \quad (2.45)$$

où

$$\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E_I + E_{II}} \text{ [s]} \quad (2.46)$$

$$E_R = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \text{ [Pa]} \quad (2.47)$$

### 2.6.1 Fluage (SLSM)

On a besoin de l'équation (2.45) sous la forme :

$$\dot{\varepsilon} + \frac{E_{II}}{\eta} \varepsilon = \frac{E_I + E_{II}}{E_I \eta} \sigma + \frac{1}{E_I} \dot{\sigma} \quad (2.48)$$

En utilisant la condition du fluage,  $\dot{\sigma} = 0$ , on trouve en posant les conditions initiales :

$$\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_I} \quad (2.49)$$

le résultat suivant :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_I} + \frac{\sigma_0}{E_{II}} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_\sigma} \right\} \right] \quad (2.50)$$

où le temps de retard  $\tau_\sigma$ , vaut :

$$\tau_\sigma = \frac{\eta}{E_{II}} \quad (2.51)$$

On définit  $J(t)$  comme étant la fonction de complaisance de fluage par :

$$J(t) = \frac{1}{E_I} + \frac{1}{E_{II}} \left[ 1 - \exp \left( -\frac{t}{\tau_\sigma} \right) \right] = \frac{1}{E_R} + J_v(t) \quad (2.52)$$

On définit aussi les *modules relaxé et non relaxé* :

$$\text{Module non relaxé } (t = 0) : E_n = E_I = 1/J_n \quad (2.53)$$

$$\text{Module relaxé } (t = \infty) : E_R = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} = 1/J_R \quad (2.54)$$

## 2.6.2 Relaxation (SLSM)

La procédure pour la relaxation est la même que pour le fluage, avec la condition  $\dot{\varepsilon} = 0$ . En utilisant les conditions initiales,  $\sigma(0) = \varepsilon E_I$ , on trouve le résultat suivant :

$$\sigma(t) = \varepsilon \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \left[ 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \exp \left( -\frac{t}{\tau_\varepsilon} \right) \right] = R(t) \cdot \varepsilon \quad (2.55)$$

où le temps de relaxation  $\tau_\varepsilon$  vaut :

$$\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E_I + E_{II}} \quad (2.56)$$

On définit la fonction de relaxation  $R(t)$  par :

$$R(t) = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \left[ 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) \right] = E_R + R_v(t) \quad (2.57)$$

ainsi que les modules relaxé et non relaxé :

$$\text{Module non relaxé (t = 0) : } E_u = E_I \quad (2.58)$$

$$\text{Module relaxé (t = } \infty \text{) : } E_R = \left( \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \right) \quad (2.59)$$

La Figure 2.13 montre une représentation des fonctions  $R(t)$  et  $J(t)^{-1}$  dans le temps.

La Figure 2.14 explique la signification physique du temps de retard, qui se traduit par :

$$\frac{R_v(t + \tau_\sigma)}{R_v(t)} = \frac{1}{\exp\{1\}} = e^{-1} \quad (2.60)$$

où  $R_v$  est le module exempt de la partie élastique. Le temps de retard est donc le temps nécessaire pour réduire la partie non-élastique du module d'un facteur  $e = 2.718$ . On peut procéder de même pour le temps de relaxation  $\tau_\varepsilon$ .

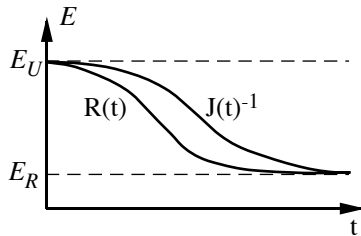


Figure 2.13. Représentation des fonctions  $R(t)$  et  $J(t)^{-1}$  dans le temps.

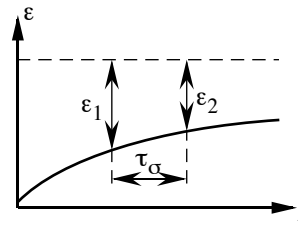


Figure 2.14. Graphique expliquant la signification physique du temps de retard.

### 2.6.3 Recouvrance de la déformation

La recouvrance est la tendance d'un matériau viscoélastique à revenir à son état de contrainte interne nul, après que la contrainte externe a été supprimée à un certain temps  $t_1$ . La recouvrance n'est pas instantanée comme on peut le voir sur la Figure 2.15.

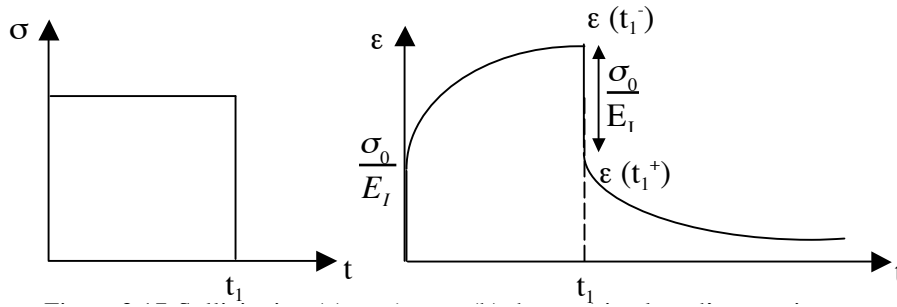


Figure 2.15. Sollicitation (a) et réponse (b) du matériau lors d'un essai de recouvrance de la déformation.

En intégrant l'équation (2.45) sous la forme vue au paragraphe 2.6.1 :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_{\parallel}}{\eta} \varepsilon = \frac{E_I + E_{\parallel}}{E_I \eta} \sigma + \frac{1}{E_I} \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.61)$$

On peut trouver la déformation à  $t > t_1$ .

Il faut diviser l'intervalle de temps  $[0 ; t]$  en deux intervalles :  $[0 ; t_1]$ , qui représente la durée de chargement et  $[t_1 ; t]$ , qui est l'intervalle de temps après le relâchement de la contrainte. On devrait normalement diviser l'intervalle de temps en quatre intervalles :  $[0^- ; 0^+]$ ,  $]0^+ ; t_1^-]$ ,  $[t_1^- ; t_1^+]$  et  $]t_1^+ ; t]$ , car il existe une déformation élastique instantanée entre  $0^-$  et  $0^+$  et entre  $t_1^-$  et  $t_1^+$ . Ici, nous allons simplifier le problème et dire que les temps de chargement et de déchargement de la contrainte sont infiniment petits.

#### *Pour l'intervalle $[0 ; t_1]$*

La contrainte est constante et vaut  $\sigma_0$ , donc  $\frac{d\sigma}{dt} = 0$ . L'équation à intégrer devient :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_{\parallel}}{\eta} \varepsilon = \frac{E_I + E_{\parallel}}{E_I \eta} \sigma_0 \quad (2.62)$$



Pour faire l'intégration, on met la relation sous la forme :

$$\int_{\varepsilon(0) = \frac{\sigma_0}{E_I}}^{\varepsilon(t_1)} \frac{d\varepsilon}{\frac{E_I + E_{II}}{E_I} \sigma_0 - \frac{E_{II}}{E_I} \varepsilon} = \int_0^{t_1} dt \quad (2.63)$$

En effectuant le calcul, on aboutit à la relation suivante :

$$-\frac{\eta}{E_{II}} \left[ \ln \left( \frac{E_I + E_{II}}{E_I \eta} \sigma_0 - \frac{E_{II}}{\eta} \varepsilon(t_1) \right) - \ln \left( \frac{E_I + E_{II}}{E_I \eta} \sigma_0 - \frac{E_{II} \sigma_0}{\eta E_I} \right) \right] = t_1 \quad (2.64)$$

Après avoir isolé  $\varepsilon(t_1)$  et à partir des définitions de  $E_R$  et  $\tau_\sigma$ , l'équation devient :

$$\varepsilon(t_1) = \frac{\sigma_0}{E_{II}} \left( 1 - \exp \left( -\frac{t_1}{\tau_\sigma} \right) \right) + \frac{\sigma_0}{E_I} \quad (2.65)$$

**Pour l'intervalle  $[t_1; t]$**

La contrainte est nulle, donc  $\sigma(t) = \frac{d\sigma}{dt} = 0$ . De plus,  $\varepsilon(t_1^+) = \varepsilon(t_1^-) - \varepsilon_{\text{élastique}} = \varepsilon(t_1^-) - \frac{\sigma_0}{E_I}$

$$\varepsilon(t_1^+) = \frac{\sigma_0}{E_{II}} \left( 1 - \exp \left( -\frac{t_1}{\tau_\sigma} \right) \right) \quad (2.66)$$

Puis, sur  $[t_1; t]$ , l'équation à intégrer prend la forme suivante :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{E_{II}}{\eta} \varepsilon = 0 \quad (2.67)$$

En introduisant les bornes d'intégration, l'équation devient :

$$\int_{\varepsilon(t_1^+)}^{\varepsilon(t)} \frac{d\varepsilon}{\varepsilon} = -\frac{E_{II}}{\eta} \int_{t_1^+}^t dt \quad (2.68)$$

Le calcul donne :

$$\ln\left(\frac{\varepsilon(t)}{\varepsilon(t_1^+)}\right) = -\frac{E_{II}}{\eta}(t - t_1^+) \quad (2.69)$$

La déformation totale vaut alors :

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(t_1^+) \exp\left(-\frac{t - t_1^+}{\tau_\sigma}\right) \quad (2.70)$$

Il faut remplacer  $\varepsilon(t_1^+)$  par sa valeur calculée précédemment et on obtient :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_{II}} \exp\left\{-\frac{t}{\tau_\sigma}\right\} \left[ \exp\left\{\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\} - 1 \right] = \frac{\sigma_0}{E_{II}} \left[ 1 - \exp\left\{-\frac{t_1}{\tau_\sigma}\right\} \right] \exp\left\{-\frac{t - t_1}{\tau_\sigma}\right\} \quad \text{pour } t > t_1 \quad (2.71)$$

## 2.7 PRINCIPE DE SUPERPOSITION DE BOLTZMANN

### 2.7.1 Viscoélasticité linéaire

Le comportement viscoélastique linéaire est un comportement appelé thermorhéologique simple, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de changement de phase, ni de changement de microstructure. On représente graphiquement ce genre de comportement à la Figure 2.16. On note que les courbes normalisées se superposent toutes. Il y a une validité réelle pour la plupart des matériaux si on travaille en petites déformations ( $\varepsilon \leq 1\%$ ). Pour la suite, on se bornera à des petites déformations. Un matériau thermorhéologiquement simple satisfait le principe de superposition temps-température qui fera l'objet du Chapitre 5.

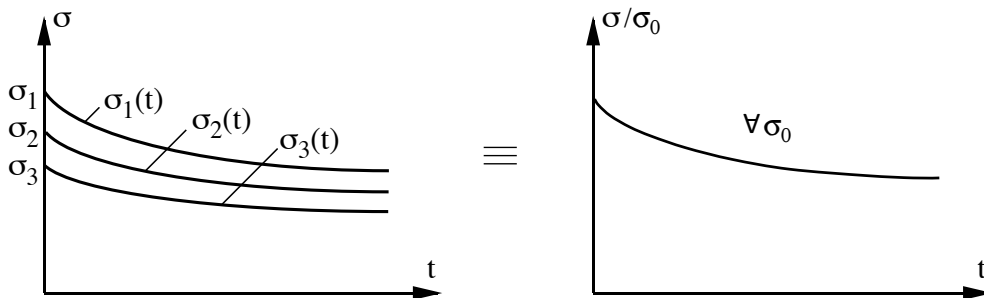


Figure 2.16. Représentation graphique d'une conséquence de la viscoélasticité linéaire.

Ainsi, la fonction de relaxation  $R(t)$  ne dépend pas de l'amplitude de la déformation et la fonction de complaisance  $J(t)$  de l'amplitude de la contrainte. Pour un mouvement oscillatoire,  $E'$  et  $E''$  et  $\eta$  ne dépendent pas de la déformation (voir Chapitre 3).

### 2.7.2 Principe de superposition

Ce principe proposé par Boltzmann permet d'étudier la réponse d'un matériau soumis à une combinaison de sollicitations. Le principe énonce que la réponse à la somme des sollicitations est égale à la somme des réponses que le matériau subirait s'il était soumis aux sollicitations correspondantes prises isolément.

Nous allons illustrer le principe de superposition de Boltzmann avec deux exemples de sollicitation. La première sollicitation (recouvrance de déformation) et se décompose en deux étapes. Lors de la première étape le matériau flue sous une contrainte constante (Figure 2.17). Lors de la seconde étape, une contrainte opposée et de même valeur que celle de la première étape est ajoutée à partir d'un temps  $t_1$  (Figure 2.18).

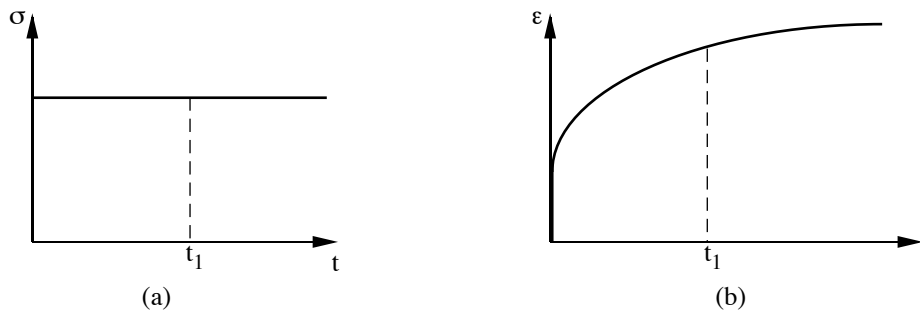


Figure 2.17. Sollicitation (a) et réponse (b) du matériau correspondant à la première étape de la recouvrance de la déformation.

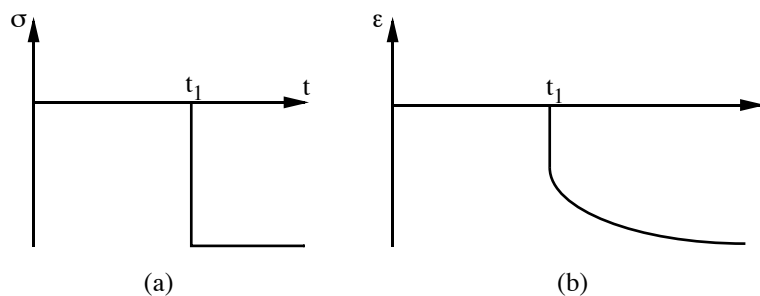


Figure 2.18. Sollicitation (a) et réponse (b) du matériau correspondant à la seconde étape de la recouvrance de la déformation.

Son comportement est décrit par les relations suivantes (les indices 1 et 2 correspondent à la première étape et à la deuxième étape) :

$$\text{Pour } t < t_1 : \sigma_1 = \sigma_0 \text{ et } \varepsilon_1 = \sigma_0 J(t)$$

$$\text{Pour } t > t_1 : \sigma_2 = -\sigma_0 \text{ et } \varepsilon_2 = -\sigma_0 J(t - t_1)$$

Le comportement global ( $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$  et  $\varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ ) est décrit à la Figure 2.19.

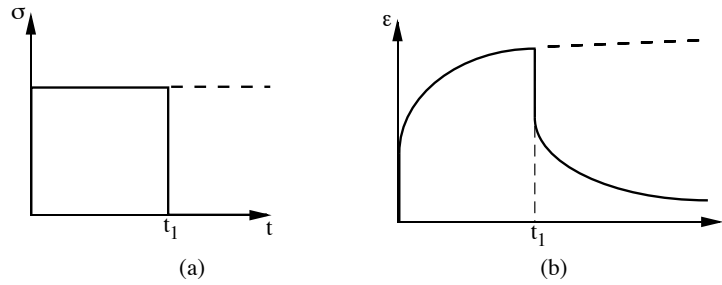


Figure 2.19. Sollicitation globale (a) et réponse globale (b) du matériau lors d'un essai de recouvrance de la déformation.

La déformation globale est donc donnée par :

$$\varepsilon = \sigma_0 J(t) \quad \text{pour } 0 < t < t_1 \quad (2.72)$$

$$\varepsilon = \sigma_0 J(t) - \sigma_0 J(t - t_1) = \sigma_0 [J(t) - J(t - t_1)] \quad \text{pour } t \geq t_1 \quad (2.73)$$

La comparaison de cette sollicitation avec la recouvrance de la déformation (paragraphe 2.6.3) est intéressante, car les deux phénomènes se ressemblent beaucoup. On remarque pour la superposition de Boltzmann, qu'à partir d'un temps  $t_1$ , il y a deux contraintes opposées et de même valeur qui s'annulent. Pour la recouvrance de la déformation, la contrainte initiale est tout simplement supprimée à un temps  $t_1$ .

Considérons maintenant une seconde sollicitation, représentée à la Figure 2.20.

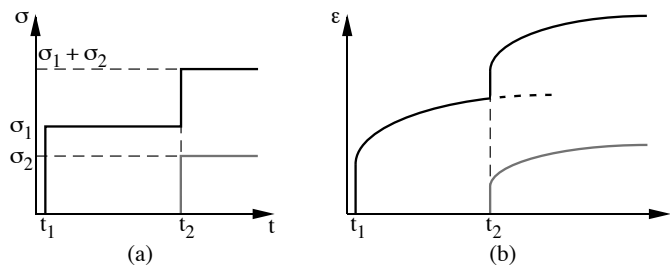


Figure 2.20. Sollicitation (a) et réponse (b) d'un matériau visco-élastique linéaire.

On peut alors écrire la réponse (déformation) :

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 J(t - t_1) \quad \text{pour} \quad t_1 < t < t_2 \quad (2.74)$$

$$\varepsilon(t) = \sigma_1 J(t - t_1) + \sigma_2 J(t - t_2) \quad \text{pour} \quad t \geq t_2 \quad (2.75)$$

Dans l'exemple suivant, on voit que les déformations  $\varepsilon_i(t) = J(t - t_i)\sigma_i$  s'additionnent comme les contraintes  $\sigma_i$ . Cela donne :

$$\varepsilon(t) = \sum_i \varepsilon_i(t) = \sum_i J(t - t_i)\sigma_i \quad (2.76)$$

On pose la relation élémentaire :

$$d\varepsilon = d\sigma J(t - \tau) \quad (2.77)$$

Pour connaître la valeur de  $\varepsilon$ , il faut prendre en compte l'histoire de  $\tau(t)$ , c'est-à-dire depuis  $]-\infty, t]$ , on procède à une intégration :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) d\sigma(\tau) = \int_{-\infty}^t J(t - \tau) \frac{\partial \sigma(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.78)$$

N.B. En général, les bornes d'intégration correspondent au début de la combinaison de sollicitations et à l'instant  $t$  de la mesure.

On peut procéder de la même manière si la sollicitation est une déformation et l'on trouve :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (2.79)$$

### 2.7.3 Cas spéciaux du principe de superposition de Boltzmann

#### *Rampe de sollicitation*

Prenons une mise en charge à vitesse constante  $\dot{\sigma}$  dans un intervalle de temps  $[t_1, t_2]$ . Le graphique de la Figure 2.21 nous montre un tel cas.

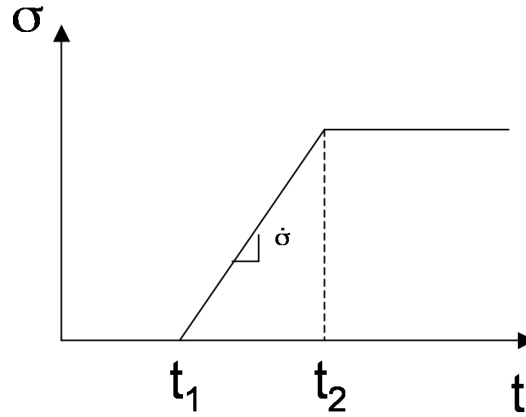


Figure 2.21. Sollicitation à vitesse de charge constante dans un intervalle de temps.

D'après le principe de superposition de Boltzmann, on a la relation suivante :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \cdot \dot{\sigma} \cdot d\tau \quad (2.80)$$

Il nous faut, tout d'abord, déterminer la vitesse de charge et résoudre l'intégrale pour tous les intervalles de temps  $(]-\infty, t_1], [t_1, t_2], [t_2, \infty[)$ .

Dans l'intervalle  $]-\infty, t_1]$  :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \cdot 0 \cdot d\tau = 0 \quad (2.81)$$

Dans l'intervalle  $[t_1, t_2]$  :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t_1} J(t-\tau) \cdot 0 \cdot d\tau + \int_{t_1}^t J(t-\tau) \cdot \dot{\sigma} \cdot d\tau = \int_{t_1}^t J(t-\tau) \cdot \dot{\sigma} \cdot d\tau \quad (2.82)$$

Dans l'intervalle  $[t_2, \infty[$  :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^{t_1} J(t-\tau) \cdot 0 \cdot d\tau + \int_{t_1}^{t_2} J(t-\tau) \cdot \dot{\sigma} \cdot d\tau + \int_{t_2}^t J(t-\tau) \cdot 0 \cdot d\tau = \int_{t_1}^{t_2} J(t-\tau) \cdot \dot{\sigma} \cdot d\tau \quad (2.83)$$

Il suffit, maintenant, de résoudre l'intégrale pour un temps donné.

Si la sollicitation est en déformation, on peut procéder de la même manière pour obtenir la contrainte sur tous les intervalles de temps.

### ***Sollicitation échelon***

Prenons une mise en charge que l'on appelle échelon. Le graphique de la Figure 2.22 nous montre ce genre de sollicitation.

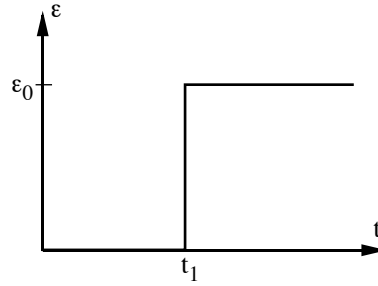


Figure 2.22. Sollicitation en échelon.

D'après le principe de superposition de Boltzmann, on a la relation suivante :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t-\tau) \cdot \dot{\varepsilon} \cdot d\tau \quad (2.84)$$

Le problème de la résolution de cette intégrale réside dans la détermination de la vitesse de sollicitation  $\dot{\varepsilon}$  qui est définie comme :

$$\dot{\varepsilon} = \infty \quad \text{si} \quad t = t_1 \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon} = 0 \quad \text{si} \quad t \neq t_1 \quad (2.85)$$

Toutefois, il existe une fonction mathématique qui possède cette propriété, il s'agit de la fonction de Dirac  $\delta$  :

$$\delta(\tau - t_1) = \infty \quad \text{si} \quad \tau = t_1 \quad \text{et} \quad \delta(\tau - t_1) = 0 \quad \text{ailleurs} \quad (2.86)$$

De plus, cette fonction a les propriétés suivantes :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau - t_1) d\tau = \int_{t_1^-}^{t_1^+} \delta(\tau - t_1) d\tau = 1 \quad \text{et} \quad \int_{t_1}^t \delta(\tau - t_1) R(t_1 - \tau) d\tau = R(t - t_1) \quad (2.87)$$

Il existe une équivalence entre  $\dot{\varepsilon}$  et la fonction de Dirac :

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_0 \delta(\tau - t_1) \quad (2.88)$$

Comme dans le cas précédent, on décompose l'axe du temps en intervalle  $(]-\infty, t_1[, ]t_1, \infty[)$ , ce qui donne :

Dans l'intervalle  $]-\infty, t_1[$  :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t R(t - \tau) \cdot 0 \cdot d\tau = 0 \quad (2.89)$$

Dans l'intervalle  $]t_1, \infty[$  :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^{t_1^-} R(t - \tau) \cdot 0 \cdot d\tau + \int_{t_1^-}^{t_1^+} R(t - \tau) \cdot \varepsilon_0 \delta(\tau - t_1) \cdot d\tau + \int_{t_1^+}^t R(t - \tau) \cdot 0 \cdot d\tau = \varepsilon_0 R(t - t_1) \quad (2.90)$$

Si la sollicitation est en contrainte, on peut procéder de la même manière pour obtenir la déformation sur tous les intervalles de temps.

## 2.8 INFORMATIONS COMPLEMENTAIRES

### 2.8.1 Transformée de Laplace

Cet outil mathématique va faciliter certains calculs. On rappelle qu'il permet de trouver les solutions d'équation différentielles. Nous l'avons déjà utilisé au paragraphe 2.6. On définit la transformée de Laplace comme :



$$L[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.91)$$

En considérant, les conditions d'existence suivantes :

- $f(t)$  continue par partie pour  $t > 0$
- $f(t)$  d'ordre exponentiel<sup>1</sup> quand  $t \rightarrow \infty$

La transformée d'une dérivée est :

$$L[f'(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = \left[ e^{-st} f(t) \right]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = sL[f(t)] - f(0) \quad (2.92)$$

La transformée inverse est définie telle que :

$$\text{si } L[f(t)] = \bar{f}(s) \Rightarrow f(t) = L^{-1}[\bar{f}(s)] \quad (2.93)$$

L'intégrale de convolution est définie comme étant :

$$f(t) * g(t) = \int_0^t f(\tau) g(t - \tau) d\tau \quad (2.94)$$

Ainsi :

$$L[f(t) * g(t)] = \bar{f}(s) \bar{g}(s) \quad (2.95)$$

Cette dernière relation peut, par exemple, s'appliquer au modèle standard.

Il existe de nombreuses tables donnant les valeurs des transformées de Laplace, par exemple : Abramowitz and Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications, 1972, New-York.

---

<sup>1</sup> une fonction est dite d'ordre exponentiel s'il existe des constantes réelles  $T > 0$ ,  $a > 0$  et  $K > 0$  telles que  $\text{abs}(f(t)) \leq K \exp\{at\}$  pour tout  $t > T$

### 2.8.2 Relations entre $R(t)$ et $J(t)$

On a vu précédemment que généralement,  $R(t)$  et  $J(t)$  se décomposent en deux parties distinctes : une partie élastique (indépendante du temps) et une partie visqueuse (dépendante du temps). De façon générale, on peut écrire ces deux fonctions de la manière suivante :

$$\begin{aligned} R(t) &= E_R + R_V(t) \\ J(t) &= \frac{1}{E_R} + J_V(t) \end{aligned} \quad (2.96)$$

$R_V(t)$  et  $J_V(t)$  peuvent avoir les formes exponentielles ou linéaires comme celles présentées au début du chapitre, mais elles peuvent également prendre d'autres formes comme, par exemple,  $a + bt^n$  (voir Chapitre 4).

Il est important de savoir si la partie élastique est comprise dans une fonction de relaxation donnée pour résoudre correctement des superpositions de contrainte ou de déformation selon le principe de Boltzmann.

Par ailleurs, nous avons vu que la fonction de complaisance de fluage et la fonction de relaxation étaient reliées par :

$$R(t)J(t) \approx 1 \quad \text{ou} \quad J(t) \approx \frac{1}{R(t)} \quad (2.97)$$

Cette approximation donne une erreur typique de :

- environ 15% pour la composante fonction de temps
- < 1% quand les déformations élastiques sont prises en compte

On peut trouver la solution exacte en utilisant l'intégrale de convolution (paragraphe 2.8.1). Soient deux fonctions  $f(t)$  et  $g(t)$ . On définit  $h(t)$  tel que les transformées de Laplace soient reliées par :

$$\bar{h}(s) = \bar{f}(s)\bar{g}(s) \quad (2.98)$$

Or, on a par définition :

$$\bar{f}(s)\bar{g}(s) = L[f(t) * g(t)] = L\left[\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau\right] \quad (2.99)$$

Par conséquent :

$$L^{-1}[\bar{h}(s)] = \int_0^t f(\tau)g(t-\tau)d\tau \quad (2.100)$$

Pour les modules, on a :

$$\bar{J}(s) = \int_0^\infty e^{-st} J(t)dt \quad \text{et} \quad \bar{R}(s) = \int_0^\infty e^{-st} R(t)dt \quad (2.101)$$

La transformée du principe de superposition de Boltzmann donne, sachant que :

$$\varepsilon(t) = \int_0^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{dt} d\tau = \dot{\sigma}(t) * J(t) \quad (2.102)$$

et

$$\sigma(t) = \int_0^t R(t-\tau) \cdot \frac{d\varepsilon}{dt} \cdot d\tau = \dot{\varepsilon}(t) * R(t) \quad (2.103)$$

Alors :

$$\left. \begin{array}{l} \bar{\varepsilon} = \bar{J}(s)s\bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} = \bar{R}(s)s\bar{\varepsilon} \end{array} \right\} \Rightarrow L^{-1}[\bar{J}(s)\bar{R}(s)] = L^{-1}\left[\frac{1}{s^2}\right] \quad (2.104)$$

Par ailleurs, d'après la table des transformées des fonctions :

$$L[t] = \frac{1}{s^2} \quad (2.105)$$

On aboutit donc au résultat :

$$\int_0^t J(\tau)R(t-\tau)d\tau = \int_0^t R(\tau)J(t-\tau)d\tau = t \quad (2.106)$$

On voit qu'en connaissant une des fonctions, on peut déterminer l'autre.

### 2.8.3 Exemple

Soit le module relaxant du polychlorure de vinyle :  $R(t) = 22'800 t^{-0.305}$  [MPa] avec  $t$  en [s]. Déterminez la fonction de complaisance.

On voit que le module relaxant est de la forme  $At^n$ . Dans les tables (voir référence à la fin du paragraphe 2.8.1, page 1022), on trouve :

$$F(t) = t^{k-1} \Rightarrow L[F(t)] = \bar{F}(s) = \frac{\Gamma(k)}{s^k} \quad (2.107)$$

La fonction  $\Gamma$  est la fonction factorielle ou Gamma d'Euler, dont une des propriétés est :

$$\Gamma(1-n)\Gamma(1+n) = \frac{\sin(\pi n)}{\pi n} \quad (2.108)$$

On calcule la transformée de  $R(t)$  :

$$L[R(t)] = \bar{R}(s) = 22800 \frac{\Gamma(1-0.305)}{s^{1-0.305}} \quad (2.109)$$

Avec la relation  $\bar{J}(s)\bar{R}(s) = 1/s^2$  trouvée au paragraphe 2.8.2, on a :

$$\bar{J}(s) = \frac{1}{s^2 \bar{R}(s)} = \frac{s^{1-0.305}}{22800 \Gamma(1-0.305) s^2} = \frac{1}{22800 \Gamma(1-0.305) s^{1+0.305}} \quad (2.110)$$

d'où :

$$J(t) = L^{-1}[\bar{J}(s)] = \frac{1}{22800 \Gamma(1-0.305)} L\left[\frac{1}{s^{1+0.305}}\right] \quad (2.111)$$

or,

$$\frac{1}{s^{1+0.305}} = \frac{\Gamma(1+0.305)}{\Gamma(1+0.305) s^{1+0.305}} \quad (2.112)$$

donc :

$$L^{-1}\left[\frac{1}{s^{1+0.305}}\right] = \frac{t^{0.305}}{\Gamma(1+0.305)} \quad (2.113)$$

On trouve :

$$J(t) = \frac{t^{0.305}}{22800 \Gamma(1-0.305) \Gamma(1+0.305)} = \frac{0.305 \pi t^{0.305}}{22800 \sin(0.305 \pi)} \quad (2.114)$$

Et finalement :

$$J(t) = 37.450 \cdot 10^{-6} t^{0.305} \quad (2.115)$$

On remarque que  $J(t)R(t) = 0.8539 \neq 1$ .

## 2.9 RESUME DES FORMULES PRINCIPALES

### REMARQUE IMPORTANTE

- lors de la pose d'éléments en série, les déformations de chacun d'eux s'additionnent alors que la contrainte est la même pour chaque élément.
- lors de la pose d'éléments en parallèle, les contraintes de chacun d'eux s'additionnent alors que la déformation est la même pour chaque élément.

### 2.9.1 Equation générale du modèle de Maxwell

$$\frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{1}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \frac{1}{\eta} \sigma \quad (2.116)$$

#### *Fluage (Maxwell)*

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{\eta} t + \frac{\sigma_0}{E} = \frac{\sigma_0}{E} \left( 1 + \frac{E}{\eta} t \right) = J(t) \sigma_0 \quad (2.117)$$

$$J(t) = E^{-1} \left( 1 + \frac{t}{\tau_\sigma} \right) \quad \text{avec} \quad \tau_\sigma = \frac{\eta}{E} \quad (2.118)$$

#### *Relaxation (Maxwell)*

$$\frac{\eta}{E} \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = \tau_\varepsilon \frac{d\sigma}{dt} + \sigma = 0 \quad \text{avec} \quad \tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E} \quad (2.119)$$

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) = \varepsilon_0 E \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) = R(t) \cdot \varepsilon_0 \quad (2.120)$$

### 2.9.2 Equation générale du modèle de Kelvin (Voigt)

$$\sigma = E\varepsilon_r + \eta \frac{d\varepsilon_a}{dt} \quad (2.121)$$

#### *Fluage (Kelvin)*

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \right] = J(t) \cdot \sigma_0 \quad \text{avec} \quad \tau_\sigma = \frac{\eta}{E} \quad (2.122)$$

#### *Relaxation (Kelvin)*

$$\sigma(t) = E\varepsilon_r \quad (2.123)$$

#### *Recouvrance de la déformation (Kelvin)*

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \quad \text{pour} \quad t > t_1 \quad (2.124)$$

où  $\tau_\sigma$  est le temps de retard qui vaut  $\eta/E$ .

### 2.9.3 Equation générale du modèle standard linéaire (SLSM : Standard Linear Solid Model)

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = E_R \varepsilon + E_I \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \quad (2.125)$$

où:  $\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E_I + E_{II}} \text{ [s]} \quad \text{et} \quad E_R = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \text{ [Pa]} \quad (2.126)$

**Fluage (SLSM)**

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E_I} + \frac{\sigma}{E_{II}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \right] \quad (2.128)$$

$$\tau_\sigma = \frac{\eta}{E_{II}} \quad (2.129)$$

$$J(t) = \frac{1}{E_I} + \frac{1}{E_{II}} \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \right] \quad (2.130)$$

$$\text{Module non relaxé } (t = 0) : E_u = E_i = 1/J_u \quad (2.131)$$

$$\text{Module relaxé } (t = \infty) : E_R = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} = 1/J_R \quad (2.132)$$

**Relaxation (SLSM)**

$$\sigma(t) = \varepsilon \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \left[ 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) \right] = R(t) \cdot \varepsilon \quad (2.133)$$

$$R(t) = \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \left[ 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\varepsilon}\right) \right] \quad (2.134)$$

$$\tau_\varepsilon = \frac{\eta}{E_I + E_{II}} \quad (2.135)$$

$$\text{Module non relaxé } (t = 0) : E_u = E_i \quad (2.136)$$

$$\text{Module relaxé } (t = \infty) : E_R = \left( \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \right) \quad (2.137)$$

**Recouvrance de la déformation**

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma_0}{E_{II}} \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right) \left[ \exp\left(\frac{t_i}{\tau_\sigma}\right) - 1 \right] \quad \text{pour } t > t_i \quad (2.138)$$



---

**2.9.4 Remarque concernant  $R(t)$  et  $J(t)$** 

$$R(t) = E_R + R_v(t)$$

$$J(t) = \frac{1}{E_R} + J_v(t) \quad (2.139)$$

---



### 3 ESSAIS HARMONIQUES

En dehors des expériences de fluage et de relaxation, il existe, en viscoélasticité linéaire, un autre type d'expérience qui présente un intérêt fondamental et qui consiste à étudier le matériau de façon oscillatoire, en lui imposant une contrainte (ou déformation) qui varie sinusoidalement au cours du temps. La linéarité des équations entraîne que la déformation (ou contrainte) est également sinusoidale et de même fréquence.

#### 3.1 GENERALITES

On fixe un barreau d'essai dans la machine et on le sollicite en torsion avec :

- une masse libre (résonance)
- un moteur à une fréquence spécifique (oscillation forcée)

On obtient le comportement en fonction de la déformation et de la vitesse de sollicitation. Les fréquences de vibration typiques sont données à la Figure 3.1.

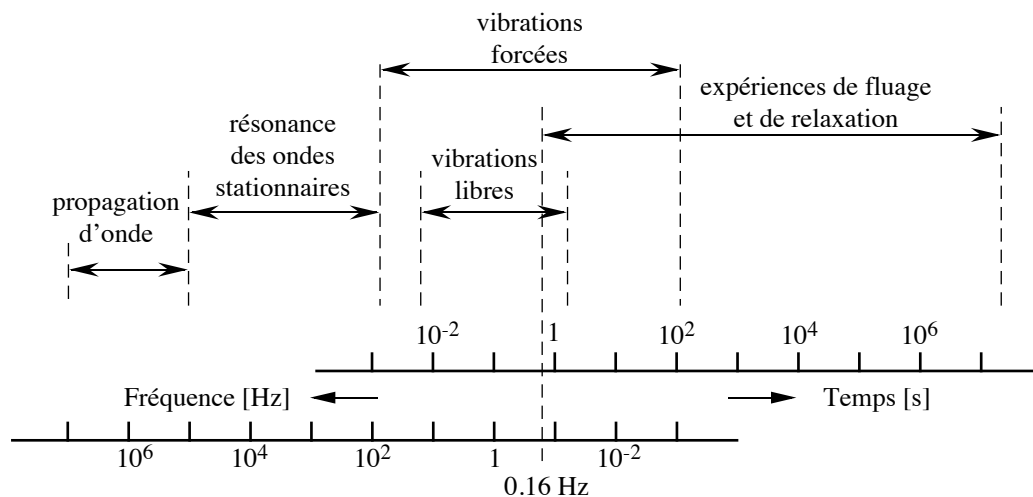


Figure 3.1. Les fréquences de vibration typiques avec leur phénomène.

La vitesse de sollicitation,  $d\varepsilon/dt$ , exerce une influence importante sur la réponse mécanique d'un matériau viscoélastique.

## 3.2 SOLLICITATION OSCILLATOIRE D'UN MATERIAU

### 3.2.1 Matériau élastique

Lorsqu'on soumet un matériau purement élastique à un essai harmonique, la réponse est en phase avec la sollicitation. Ce phénomène est décrit à la Figure 3.2.

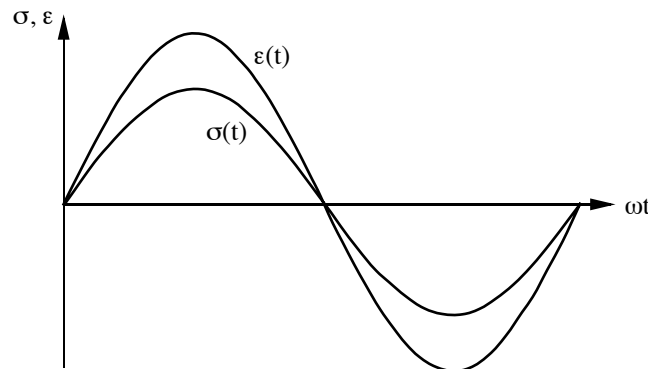


Figure 3.2. Sollicitation et réponse d'un matériau élastique à un essai harmonique.

On représente généralement la déformation et la contrainte en fonction du produit entre le temps et la fréquence. Ce produit est un temps adimensionnel. Cette astuce permet d'obtenir une courbe normalisée pour toutes les fréquences. En effet, lors d'essais à différentes fréquences pour le même matériau, on obtient une seule et même courbe ; tandis que si on représentait la sollicitation et la réponse en fonction du temps, on obtiendrait autant de courbes que de fréquences testées. Les relations sont du type :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad (3.1)$$

Il est important de noter que la sollicitation doit impérativement rester dans le domaine élastique linéaire du matériau considéré, quelle que soit la nature de celui-ci. La zone élastique est représentée à la Figure 3.3.

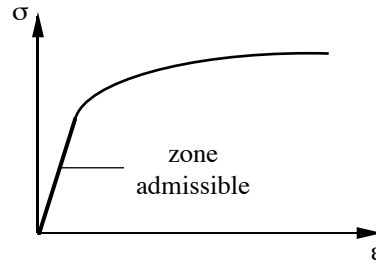


Figure 3.3. Représentation de la zone admissible de sollicitations pour ce genre d'essai.

### 3.2.2 Matériau visqueux (plastique)

Pour un matériau totalement visqueux, la sollicitation et la réponse sont déphasées d'un quart de période. Leurs représentations sont illustrées à la Figure 3.4.

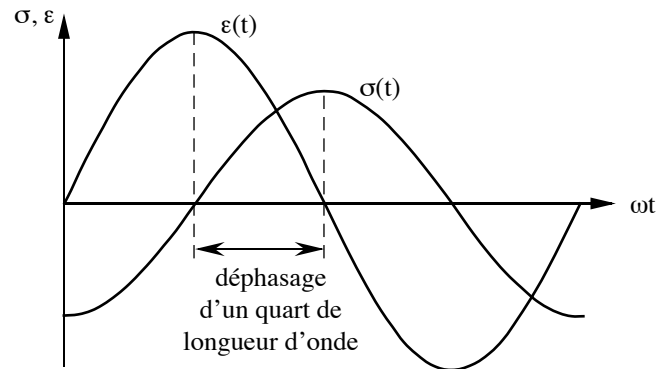


Figure 3.4. Sollicitation ( $\varepsilon$ ) et réponse ( $\sigma$ ) d'un matériau anélastique à un essai harmonique.

Les relations sont pour une sollicitation en déformation :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \sigma = \sigma_0 \sin(\omega t + \pi/2) \quad \text{car} \quad \sigma = \eta d\varepsilon/dt \quad (3.2)$$

### 3.2.3 Matériau viscoélastique

Pour un matériau viscoélastique, la représentation de la sollicitation et de la réponse se trouvent à la Figure 3.5. On s'aperçoit que le déphasage n'a pas une valeur définie, mais dépend du matériau et des conditions de l'essai.

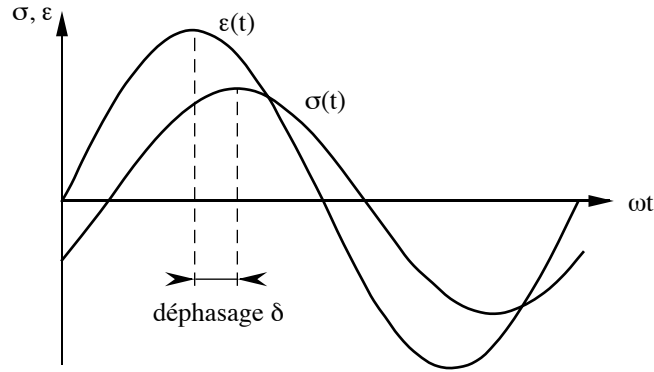


Figure 3.5. Sollicitation ( $\varepsilon$ ) et réponse ( $\sigma$ ) d'un matériau viscoélastique à un essai harmonique.

Comme  $\varepsilon$  a un décalage de phase quelconque par rapport à  $\sigma$ , on a les relations suivantes (on considère le cas où la sollicitation est en déformation) :

$$\begin{aligned} \text{sollicitation : } \varepsilon &= \varepsilon_0 \sin(\omega t) \\ \text{réponse : } \sigma &= \sigma_0 \sin(\omega t + \delta) \end{aligned} \quad (3.3)$$

où  $\delta$  est l'angle de perte ou déphasage. En utilisant des relations trigonométriques, on obtient :

$$\begin{aligned} \text{sollicitation : } \varepsilon &= \varepsilon_0 \sin(\omega t) \\ \text{réponse : } \sigma &= \sigma_0 \sin(\omega t) \cos(\delta) + \sigma_0 \cos(\omega t) \sin(\delta) \end{aligned} \quad (3.4)$$

où l'amplitude en phase avec la déformation  $\varepsilon(t)$  est  $\sigma_0 \cos(\delta)$  et l'amplitude en opposition de phase avec la déformation  $\varepsilon(t)$  est  $\sigma_0 \sin(\delta)$ .

### 3.3 DEFINITIONS

Trois définitions sont nécessaires :

- Le *module de conservation* ou *module de stockage* correspond à l'énergie stockée dans l'échantillon à cause de la contrainte appliquée, c'est la composante élastique des matériaux. Il est défini comme :

$$E' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \cos(\delta) \quad (3.5)$$

- Le *module de perte* ou *module de la friction interne* correspond à la dissipation d'énergie, c'est la composante visqueuse des matériaux. Il est défini comme :

$$E'' = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \sin(\delta) \quad (3.6)$$

- Le *facteur de perte* est défini par :

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} \quad (3.7)$$

où  $\delta$  est le déphasage. On trouve des relations du type :

$$\text{sollicitation : } \varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t)$$

$$\text{réponse : } \sigma = \varepsilon_0 E' \sin(\omega t) + \varepsilon_0 E'' \cos(\omega t) \quad (3.8)$$

Quelques valeurs typiques pour un polymère solide :

- $E' \approx 10^9$  [Pa]
- $E'' \approx 10^7$  [Pa]
- $\delta \approx 0.01$
- (polymère fondu:  $\delta \approx 40^\circ - 80^\circ$ )

### 3.4 COMPORTEMENT DYNAMIQUE POUR LE MODELE STANDARD LINEAIRE

Nous considérons deux sollicitations possibles, soit une contrainte harmonique, soit une déformation harmonique.

#### 3.4.1 Contrainte sinusoïdale

On considère une variation sinusoïdale de la contrainte appliquée :

$$\sigma = \sigma_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \dot{\sigma} = \omega \sigma_0 \cos(\omega t) \quad (3.9)$$

En utilisant l'équation générale sous forme différentielle du SLSM donnée au paragraphe 2.6.1 :

$$\dot{\varepsilon} + \frac{1}{\tau_\sigma} \varepsilon = \left( \frac{E_I + E_{II}}{E_I E_{II} \tau_\sigma} \right) \sigma + \frac{1}{E_I} \dot{\sigma} \quad (3.10)$$

En substituant les valeurs de  $\sigma$  et de  $\dot{\sigma}$  dans l'équation précédente, on aboutit à :

$$\frac{d\varepsilon}{dt} + \frac{\varepsilon}{\tau_\sigma} = \sigma_0 \left( \frac{E_I + E_{II}}{E_I E_{II} \tau_\sigma} \right) \sin(\omega t) + \sigma_0 \frac{\omega}{E_I} \cos(\omega t) \quad (3.11)$$

où  $\tau_\sigma$  est le temps de retard comme défini au paragraphe 2.3.1, c'est-à-dire :

$$\tau_\sigma = \frac{\eta}{E_{II}} \quad (3.12)$$

La solution particulière est de la forme :

$$\varepsilon = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t) \quad (3.13)$$

avec comme dérivée :

$$\dot{\varepsilon} = -A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t) \quad (3.14)$$



En remplaçant  $\varepsilon$  et  $\dot{\varepsilon}$  par les expressions ci-dessus dans l'équation (3.11), on a :

$$\left(B\omega + \frac{A}{\tau_\sigma}\right)\cos(\omega t) + \left(\frac{B}{\tau_\sigma} - A\omega\right)\sin(\omega t) = \sigma_0 \left(\frac{E_I + E_{II}}{E_I E_{II} \tau_\sigma}\right)\sin(\omega t) + \sigma_0 \frac{\omega}{E_I}\cos(\omega t) \quad (3.15)$$

Par comparaison entre les termes en sinus et en cosinus, on a un système de deux équations à deux inconnues :

$$-A\omega + \frac{B}{\tau_\sigma} = \sigma_0 \frac{E_I + E_{II}}{E_I E_{II} \tau_\sigma} \quad (3.16a)$$

$$\frac{A}{\tau_\sigma} + B\omega = \sigma_0 \frac{\omega}{E_I} \quad (3.16b)$$

En résolvant ce système, on trouve que les constantes  $A$  et  $B$  valent :

$$A = -\frac{\sigma_0 \omega \tau_\sigma}{E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad \text{et} \quad B = \sigma_0 \left[ \frac{1}{E_I} + \frac{1}{E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \right] \quad (3.17)$$

Par ailleurs la déformation peut être exprimée par :

$$\varepsilon = \sigma_0 \sin(\omega t) \cos(\delta) - \sigma_0 \cos(\omega t) \sin(\delta) = \sqrt{(A^2 + B^2)} \sin(\omega t - \delta) = \varepsilon_0 \sin(\omega t - \delta) \quad (3.18)$$

où  $\delta$  est le déphasage et le facteur de perte correspondant vaut :

$$\tan(\delta) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = \frac{A}{B} = -\frac{E_I \omega \tau_\sigma}{E_I + E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad (3.19)$$

Le terme  $B \sin(\omega t)$  représente le comportement en phase et  $A \cos(\omega t)$  celui hors phase. Par conséquent, on a la complaisance de stockage :

$$J' = \frac{1}{E'} = \frac{B}{\sigma_0} = \frac{1}{E_I} + \frac{1}{E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad (3.20)$$

et la complaisance de perte :

$$J'' = \frac{1}{E''} = -\frac{A}{\sigma_0} = \frac{\omega \tau_\sigma}{E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad (3.21)$$

On obtient ainsi l'équation particulière pour la déformation :

$$\varepsilon = \sigma_0 \left[ J' \sin(\omega t) - J'' \cos(\omega t) \right] \quad (3.22)$$

### 3.4.2 Déformation sinusoïdale

La variation sinusoïdale de la déformation appliquée est :

$$\varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \quad \text{et} \quad \dot{\varepsilon} = \omega \varepsilon_0 \cos(\omega t) \quad (3.23)$$

En remplaçant ces expressions dans l'équation générale du SLSM :

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = E_R \varepsilon + E_I \tau_\varepsilon \dot{\varepsilon} \quad (3.24)$$

on obtient :

$$\sigma + \tau_\varepsilon \dot{\sigma} = E_R \varepsilon_0 \sin(\omega t) + E_I \tau_\varepsilon \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t) \quad (3.25)$$

On cherche une solution de la forme :

$$\sigma = \varepsilon_0 E' \sin(\omega t) + \varepsilon_0 E'' \cos(\omega t) \quad \text{et} \quad \dot{\sigma} = \varepsilon_0 E' \omega \cos(\omega t) - \varepsilon_0 E'' \omega \sin(\omega t) \quad (3.26)$$

En remplaçant dans (3.2), et en séparant les termes en cos et en sin, on a :

$$E_R = E' - \tau_\varepsilon E'' \omega \quad \text{et} \quad \tau_\varepsilon E_I \omega = E'' + \tau_\varepsilon \omega E' \quad (3.27)$$

En résolvant pour  $E'$  et  $E''$ , on aboutit aux modules en phase et hors phase suivants :

$$E' = \left( \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \right) \left[ 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \frac{\omega^2 \tau_\varepsilon^2}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2} \right] \quad (3.28)$$

$$E'' = \left( \frac{E_I^2}{E_I + E_{II}} \right) \left[ \frac{\omega \tau_\varepsilon}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2} \right] \quad (3.29)$$

Ces deux fonctions sont schématiquement représentées à la Figure 3.6. On voit que  $E''$  passe par un maximum pour une vitesse angulaire qui correspond à l'inverse du temps de relaxation du matériau. On obtient aussi le facteur de perte :

$$\tan(\delta) = \frac{\omega \tau_\varepsilon}{\left( \omega^2 \tau_\varepsilon^2 + \frac{E_{II}}{E_I} (1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2) \right)} \quad (3.30)$$

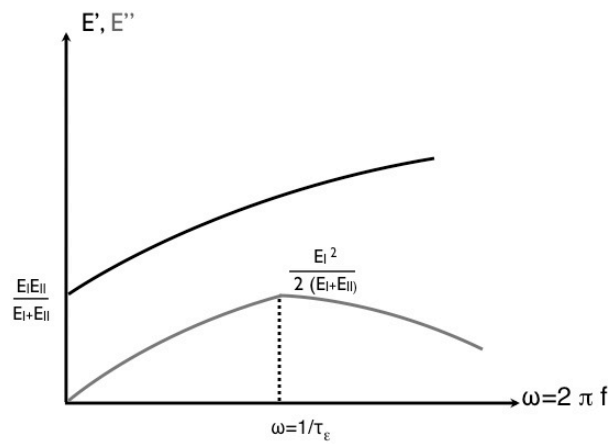


Figure 3.6. Modules de stockage  $E'$  et de perte  $E''$  pour le modèle SLSM en fonction de la fréquence.

### 3.5 ENERGIE DISSIPÉE PAR CYCLE ET PAR UNITE DE VOLUME

Par définition, l'énergie dissipée est la surface représentée à la Figure 3.7, elle est en fait décrite par une hystérèse.

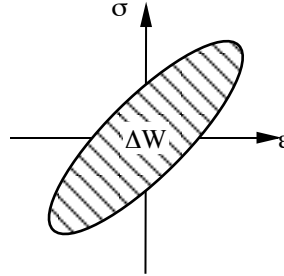


Figure 3.7. Représentation graphique de l'énergie dissipée sur un cycle.

L'énergie dissipée sur un cycle est :

$$\Delta W = \int \sigma d\varepsilon = \int_0^{2\pi/\omega} \sigma \frac{\partial \varepsilon}{\partial t} dt \quad (3.31)$$

On a les relations suivantes pour une sollicitation en déformation :

$$\text{sollicitation : } \varepsilon = \varepsilon_0 \sin(\omega t) \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{dt} = \varepsilon_0 \omega \cos(\omega t) \quad (3.32)$$

$$\text{réponse : } \sigma = \varepsilon_0 E' \sin(\omega t) + \varepsilon_0 E'' \cos(\omega t) \quad (3.33)$$

On peut maintenant calculer l'énergie dissipée sur un cycle :

$$\Delta W = \omega \varepsilon_0^2 \int_0^{2\pi/\omega} (E' \sin(\omega t) \cos(\omega t) + E'' \cos^2(\omega t)) dt \quad (3.34)$$

$$\Rightarrow \Delta W = \pi E'' \varepsilon_0^2 \quad (3.35)$$

De manière analogue, on trouve le résultat pour une sollicitation en contrainte :

$$\Delta W = \pi J'' \sigma_0^2 \quad (3.36)$$

On constate que seules les composantes hors phase d'un matériau viscoélastique affectent l'énergie dissipée. L'unité de cette énergie est le [J/m³].

### 3.6 REPRESENTATION COMPLEXE

Comme on a des modules en phase et hors phase, on peut utiliser la théorie des nombres complexes. Pour cela, il faut exprimer la sollicitation et la réponse en nombres complexes. Pour une sollicitation en déformation, cela donne :

$$\text{sollicitation : } \varepsilon = \varepsilon_0 \exp(i\omega t)$$

$$\text{réponse : } \sigma = \sigma_0 \exp[i(\omega t + \delta)] \quad (3.37)$$

A partir de là, on peut définir deux modules apparents, le module complexe  $E^*$  et la compliance complexe  $J^*$  :

$$E^* = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp\{i\omega t + i\delta - i\omega t\} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp\{i\delta\} = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} (\cos(\delta) + i\sin(\delta)) = E' + iE'' \quad (3.38)$$

$$J^* = \frac{\varepsilon}{\sigma} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \exp\{i\omega t - i\omega t - i\delta\} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} \exp\{-i\delta\} = \frac{\varepsilon_0}{\sigma_0} (\cos(\delta) - i\sin(\delta)) = J' - iJ'' \quad (3.39)$$

Ici, le déphasage  $\delta$  est défini comme étant :

$$\tan(\delta) = \frac{E''}{E'} = \frac{J''}{J'} \quad (3.40)$$

La Figure 3.8 représente ces deux modules apparents dans le plan complexe.

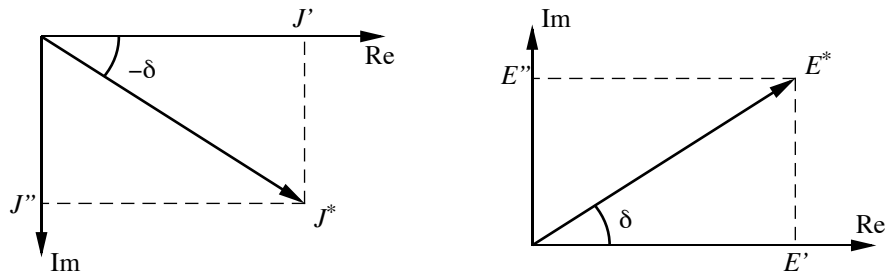


Figure 3.8. Représentation graphique dans l'espace complexe des différents modules et du déphasage.

Entre ces deux modules complexes ( $E^*$  et  $J^*$ ), on a la relation :

$$J^*(i\omega) = 1/(E^*(i\omega)) \quad (3.41)$$

Attention, les définitions des modules complexes sont différentes si une sollicitation en contrainte est imposée :

$$\begin{aligned} \text{sollicitation : } \sigma &= \sigma_0 \exp\{i\omega t\} \\ \text{réponse : } \varepsilon &= \varepsilon_0 \exp\{i(\omega t - \delta)\} \end{aligned} \quad (3.42)$$

En effet, on a maintenant :

$$E^* = E' - iE'' \quad (3.43)$$

$$J^* = J' + iJ'' \quad (3.44)$$

### 3.7. RESUME DES FORMULES IMPORTANTES

#### 3.7.1 Contrainte sinusoïdale

Facteur de perte :

$$\tan(\delta) = \frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)} = \frac{A}{B} = -\frac{E_I \omega \tau_\sigma}{E_I + E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad (3.45)$$

Complaisance de stockage :

$$J' = \frac{1}{E_I} + \frac{1}{E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad (3.46)$$

Complaisance de perte :

$$J'' = \frac{\omega \tau_\sigma}{E_{II} (1 + \omega^2 \tau_\sigma^2)} \quad (3.47)$$

#### 3.7.2 Déformation sinusoïdale

Facteur de perte :

$$\tan(\delta) = \frac{\omega \tau_\varepsilon}{\left( \omega^2 \tau_\varepsilon^2 + \frac{E_{II}}{E_I} (1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2) \right)} \quad (3.48)$$

Module de stockage :

$$E' = \left( \frac{E_I E_{II}}{E_I + E_{II}} \right) \left[ 1 + \frac{E_I}{E_{II}} \frac{\omega^2 \tau_\varepsilon^2}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2} \right] \quad (3.49)$$

Module de perte :

$$E'' = \left( \frac{E_I^2}{E_I + E_{II}} \right) \left[ \frac{\omega \tau_\varepsilon}{1 + \omega^2 \tau_\varepsilon^2} \right] \quad (3.50)$$

#### 3.7.3 Energie dissipée par cycle et par unité de volume

Sollicitation en déformation  $\Delta W = \pi E'' \varepsilon_0^2$  (3.51)

Sollicitation en contrainte  $\Delta W = \pi J'' \sigma_0^2$  (3.52)

---





## 4 MODELES DE RELAXATION ET BASES PHYSIQUES

La représentation intégrale pour un matériau viscoélastique linéaire à l'aide de la superposition de Boltzmann est, pour le fluage :

$$\varepsilon(t) = \int_{-\infty}^t J(t-\tau) \frac{d\sigma}{d\tau} d\tau \quad (4.1)$$

sachant que :

$$J(t) = \frac{1}{E_R} + J_v(t) \quad (4.2)$$

on a donc :

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma(t)}{E_R} + \int_{-\infty}^t J_v(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (4.3)$$

De même pour la relaxation :

$$\sigma(t) = \varepsilon(t) E_R + \int_{-\infty}^t R_v(t-\tau) \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau \quad (4.4)$$

Les fonctions au cœur de l'intégrale ('*kernel functions*'),  $J_v(t)$  et  $R_v(t)$  sont des fonctions de mémoire reliant l'évolution des contraintes et des déformations. Différentes expressions, représentant des phénomènes physiques distincts, sont couramment utilisées.

Les modèles de relaxation sont obtenus par un essai de relaxation comme décrit au paragraphe 1.4.2, dans lequel une déformation constante  $\varepsilon_0$  est subitement appliquée à  $t = 0$ . On a défini alors la fonction de relaxation  $R_v(t)$ , aussi appelée module relaxant :

$$R(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \sigma(t) = \varepsilon_0 (E_R + R_v(t)) \quad (4.5)$$

#### 4.1 MODELE DE MAXWELL

Prenons l'exemple du modèle mécanique simple de Maxwell (décrit à la Figure 2.8) dans les conditions de relaxation, c'est à dire pour  $\dot{\varepsilon} = 0$ . La condition pour un modèle linéaire (modèle de Maxwell) est :

$$\dot{\sigma} = -\frac{1}{\tau_{\varepsilon}} \sigma \quad \text{où } \tau_{\varepsilon} \text{ est le temps de relaxation} \quad (4.6)$$

Le module relaxant évolue dans le temps comme l'illustre la Figure 4.1.

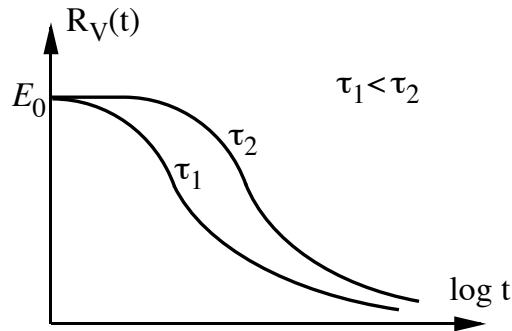


Figure 4.1. Evolution du module relaxant d'après le modèle linéaire.

Comme au Chapitre 2, on trouve la solution suivante :

$$\sigma = \sigma_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\varepsilon}}\right) \quad (4.7)$$

$$R_V(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\varepsilon}}\right) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau_{\varepsilon}}\right) \quad (4.8)$$

- Caractéristiques : temps de relaxation unique, décroissance exponentielle, relaxation de  $\sigma$  en trois décades.
- Validité : surestime la relaxation.
- Paramètre :  $\tau_{\varepsilon}$  déplace la courbe par rapport à l'axe du temps.

### 4.3 MODELE DE MAXWELL GENERALISE

Ce modèle permet de décrire le comportement d'un matériau ayant une multitude de temps de relaxation discrets. Le modèle est représenté à la Figure 4.2.

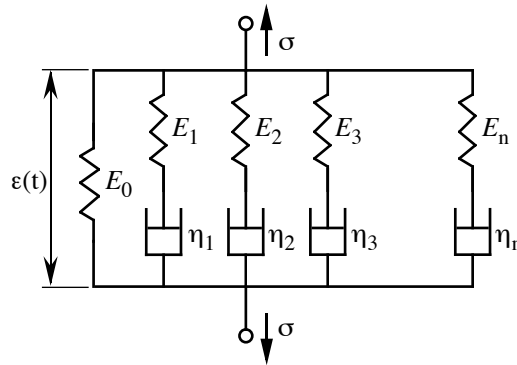


Figure 4.2. Représentation schématique du modèle de Maxwell généralisé.

Le modèle est décrit par une série de Prony :

$$R_V(t) = E_0 \sum_{i=0}^n C_i \exp\left\{-\frac{t}{\tau_{ei}}\right\} = \sum_{i=0}^n E_i \exp\left\{-\frac{t}{\tau_{ei}}\right\} \quad \text{où} \quad 0 < \tau_{ei} = \frac{\eta_i}{E_i} < \infty \quad (4.9)$$

Cette représentation peut être utilisée pour n'importe quelle courbe de relaxation et converge rapidement avec un terme par décade de temps. Les coefficients  $C_i$  peuvent être vus comme les composantes d'un spectre discret de relaxation. Ce modèle est pratique pour décrire des courbes de relaxation où les données sont limitées dans le temps.

- Caractéristiques : série de Prony, spectre discret de  $\tau_{ei}$ , un élément par décade.
- Validité : c'est un modèle empirique (régression).

On a représenté le module relaxant à la Figure 4.3.

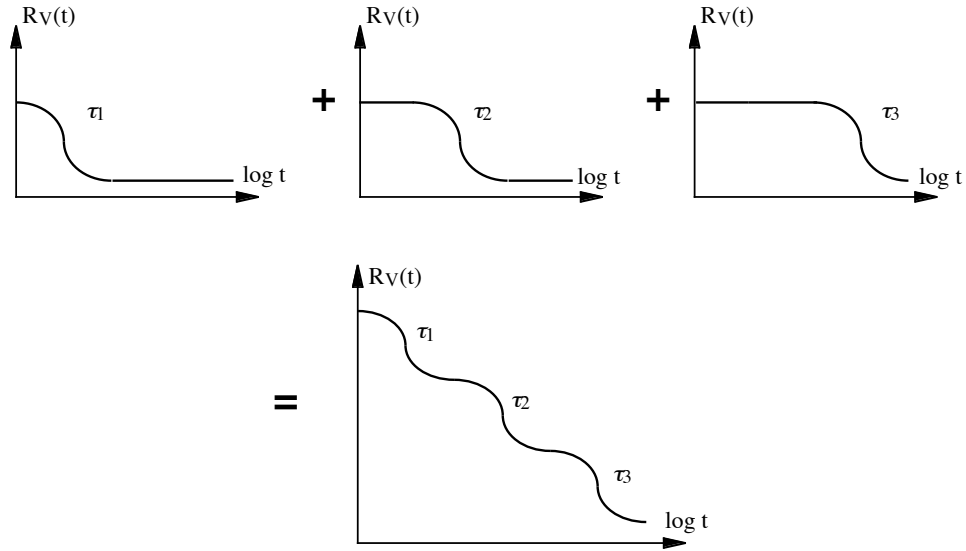


Figure 4.3. Construction graphique de l'évolution du module relaxant d'après le modèle de Maxwell généralisé. On additionne les différents modules relaxants correspondant aux différents temps de relaxation (il y a un temps de relaxation par éléments).

### 4.3 MODELE DE KELVIN (VOIGT) GENERALISE

Ce modèle est construit sur la même base que le modèle de Maxwell généralisé. Il s'agit du modèle de Kelvin mis en série, puis on rajoute un ressort en série. On trouve alors une fonction de complaisance qui est :

$$J_V(t) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{E_i} \left[ 1 - \exp \left\{ -\frac{t}{\tau_{\sigma_i}} \right\} \right] \quad \text{où} \quad \tau_{\sigma_i} = \frac{\eta_i}{E_i} \quad (4.10)$$

### 4.4 MODELE COOPERATIF KWW (EXPONENTIEL ALLONGE)

Le modèle proposé initialement par Kohlrausch en 1854 et repris plus tard par Williams et Watt en 1970 représente la relaxation des contraintes dues au mouvement coopératif (interdépendant, coordonné) d'unités primitives ayant chacune un temps caractéristique de relaxation donné par le modèle linéaire. Ce modèle est décrit par une relation exponentielle incluant un exposant  $\beta$  :

$$\sigma(t) = \sigma_0 \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\tau_{\sigma_i}} \right)^\beta \right\} \quad (4.11)$$

On obtient le module relaxant, représenté à la Figure 4.4 :

$$R_V(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\tau_{\sigma_i}} \right)^\beta \right\} = E_0 \exp \left\{ - \left( \frac{t}{\tau_{\sigma_i}} \right)^\beta \right\} \quad (4.12)$$

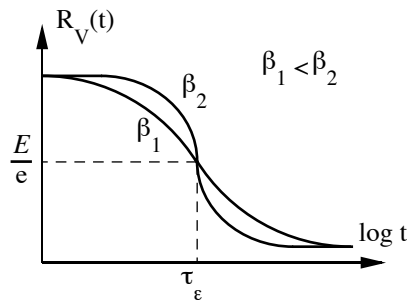


Figure 4.4. Evolution du module relaxant d'après le modèle KWW.

Il y a deux cas limites. Le premier où  $\beta$  vaut 1 correspond alors au modèle linéaire de Maxwell. Le deuxième où  $\beta$  vaut 0 correspond au modèle élastique.

- Caractéristiques : exposant d'étirement  $\beta$ , relaxation coopérative d'un grand nombre de processus.
- Validité : bon pour des temps moyens, peu précis pour des temps courts, et surestime aux temps longs.
- Paramètres :  $\tau_\varepsilon$  déplace la courbe par rapport à l'axe du temps,  $\beta$  modifie la forme la courbe en changeant sa pente.

#### 4.5 SPECTRE DE TEMPS DE RELAXATION (STR)

Les modèles présentés précédemment ne décrivent pas très bien le comportement de la structure d'un polymère. La difficulté vient de l'utilisation de plusieurs modèles possédant plusieurs temps de relaxation. Cependant, on a divers modèles à disposition, comme celui de Maxwell généralisé (paragraphe 4.2) qui possède plusieurs temps de relaxation (un pour chaque élément). On définit le spectre de temps de relaxation comme représentant la distribution des temps de relaxation, caractérisée par une densité de probabilités.

Appliquée au modèle de Maxwell généralisé, on a une fonction de relaxation :

$$R(t) = E_R + \sum_{i=0}^n E_i \exp\left(-\frac{t}{\tau_{ei}}\right) \quad (4.13)$$

Un exemple de spectre de relaxation avec les valeurs des modules est reporté à la Figure 4.5.

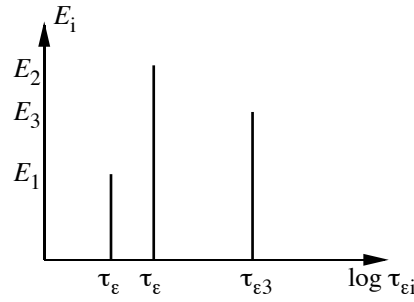


Figure 4.5. Exemple de spectre discret de temps de relaxation en fonction du module.

On note que pour un grand nombre d'éléments (si  $n \rightarrow \text{infini}$ ) on obtient un spectre continu dénommé  $H(\tau_e)$  et décrit à la Figure 4.6.

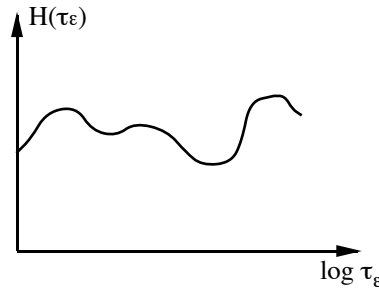


Figure 4.6. Exemple de spectre continu de temps de relaxation  $H(\tau_e)$  en fonction du module.

On peut écrire la fonction de relaxation et de complaisance au fluage (obtenues en utilisant un modèle de Kelvin généralisé) en différenciant la partie élastique à la partie visqueuse :

$$\text{relaxation} : R(t) = E_R + \int_0^\infty H(\tau_e) \exp\left(-\frac{t}{\tau_e}\right) d\tau_e \quad (4.14)$$

$$\text{fluage} : J(t) = J_u + \int_0^\infty L(\tau_\sigma) \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau_\sigma}\right)\right] d\tau_\sigma \quad (4.15)$$

$H(\tau_\varepsilon)$  est défini comme étant le spectre de relaxation et  $L(\tau_\sigma)$  comme le spectre de retard.  $H(\tau_\varepsilon)$  et  $L(\tau_\sigma)$  reflètent les mécanismes physiques et chimiques du comportement rhéologique. Les composantes aux temps courts indiquent des phénomènes localisés, tandis que les temps de relaxation longs indiquent des mécanismes impliquant des domaines plus étendus.

#### 4.6 CALCUL DU SPECTRE DE TEMPS DE RELAXATION

Il existe des méthodes permettant d'avoir accès aux spectres de temps de relaxation.

##### *Approximation d'Alfred*

(différentiation de  $R(t) = E_R + \int_0^\infty H(\tau_\varepsilon) \exp\{-t/\tau_\varepsilon\} d\tau_\varepsilon$ )

$$H(\tau) \approx - \left. \frac{dR(t)}{d \ln(t)} \right|_{t=\tau} \quad (4.16)$$

##### *Approximation de Ferry & Williams*

$$H(\tau) = -M(m)R(t) \left. \frac{d \log R(t)}{d \log t} \right|_{t=\tau} \quad (4.17)$$

où  $M(m) = \frac{1}{\Gamma(m+1)}$ , avec  $\Gamma$  qui est une fonction tabulée et  $m$  est la pente  $\frac{d \log H}{d \log \tau_\varepsilon}$ .

##### *Approximation de Schwarzl & Staverman*

$$H(\tau_\varepsilon) = \left. \frac{dR(t)}{d \ln t} + \frac{d^2 R(t)}{d (\ln t)^2} \right|_{t=2\tau_\varepsilon} \quad (4.18)$$

L'approximation d'Alfred donne généralement une bonne valeur de référence.

## 4.7 MODELES PHYSIQUES THERMIQUEMENT ACTIVES

### 4.7.1 Modèle exponentiel

Ce modèle représente le passage d'un état 1 à un état 2 de plus basse énergie avec une énergie d'activation  $E_a = -v^* \sigma$  où  $v^*$  représente un *volume d'activation*, et  $\sigma$  est la contrainte. Pour les polymères, on a :

$$\frac{kT}{v^*} = 0.1 \sigma_0 \quad (4.19)$$

avec  $k$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température absolue (en Kelvin). L'énergie plus basse correspond à une contrainte plus faible. Pour ce modèle, on pose :

$$\dot{\sigma} = -A \exp\left(\frac{v^* \sigma}{kT}\right) \quad (4.20)$$

où  $A$  est une constante.

On a un module relaxant qui est :

$$R(t) = E_0 + R_v(t) = \frac{\sigma_0}{\varepsilon_0} - \frac{kT}{v^* \varepsilon_0} \ln\{t - \tau_\varepsilon\} \quad (4.21)$$

Le module relaxant a été reporté sur la Figure 4.7 et une représentation du mécanisme sur la Figure 4.8.

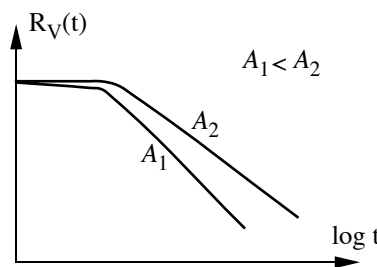


Figure 4.7. Evolution du module relaxant d'après le modèle exponentiel.



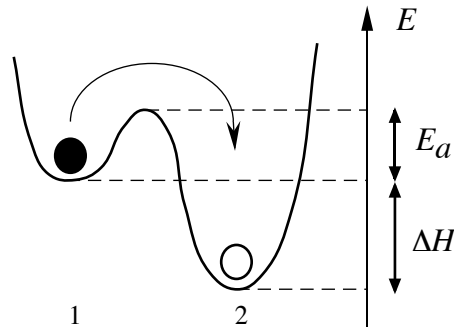


Figure 4.8. Représentation du mécanisme physique.

#### 4.7.2 Modèle exponentiel avec ‘réaction’ dans les deux sens

On considère le même passage d’énergie que dans le cas du modèle exponentiel. Cependant, la probabilité de la ‘réaction’  $2 \rightarrow 1$  est aussi prise en compte. Ce phénomène est décrit à la Figure 4.9.

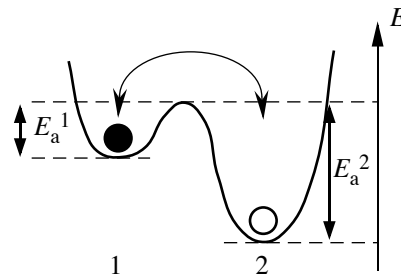


Figure 4.9. Représentation du mécanisme physique en considérant la “réaction” dans les deux sens.

La solution, légèrement différente, est donnée par :

$$\dot{\sigma} = -A_0 \sinh\left(\frac{v^* \sigma}{kT}\right) \quad (4.22)$$

Car  $\sinh x = (e^x - e^{-x})/2$ . On voit que la contrainte est de la forme :

$$\sigma \propto \ln(t - \tau_\epsilon) - \ln(t + \tau_\epsilon) \quad (4.23)$$

La nature des composantes aux temps courts ou longs dont il est question, sont schématisés à la figure 4.10.

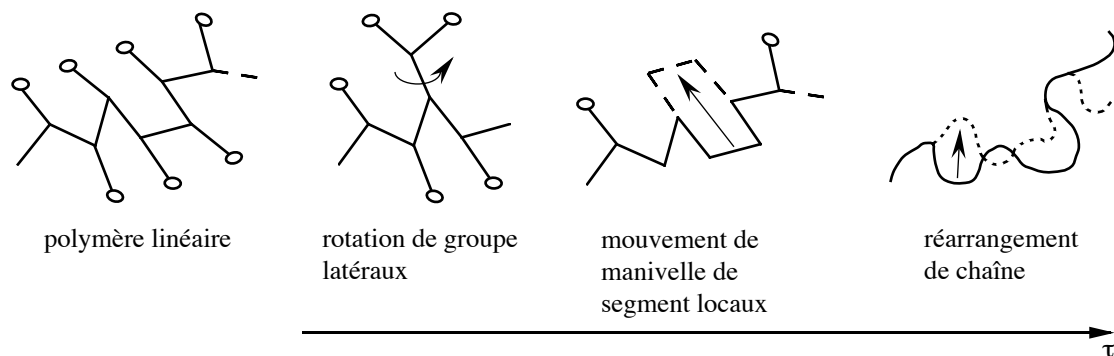


Figure 4.10. Mouvements des chaînes de polymère en rapport avec le temps nécessaire pour les effectuer.

## 5 EQUIVALENCE TEMPS - TEMPERATURE

### 5.1 COURBE MAÎTRESSE ET COEFFICIENT DE TRANSLATION $a_T$

On a constaté qu'il existe une équivalence entre la durée d'une sollicitation et la température d'un matériau. Par exemple, le comportement d'un polymère à température élevée pour des sollicitations rapides correspond au comportement du même matériau à basse température pour des grands temps de sollicitation. Ainsi, la Figure 5.1 montre que la relaxation d'un polymère viscoélastique à une température donnée peut être superposée à la réponse obtenue à une autre température moyennant un décalage selon l'axe des temps.

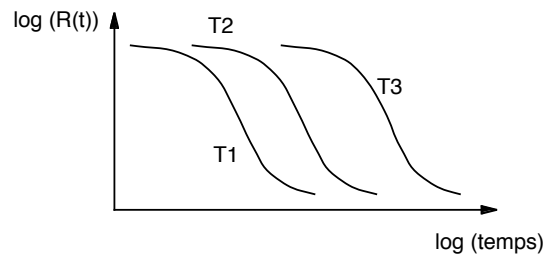


Figure 5.1. Allure des modules de relaxation en fonction du temps pour différentes températures ( $T_1 > T_2 > T_3$ ).

La distance de décalage est une fonction de la température décrite par un coefficient de translation (*shift factor*)  $a_T$ . On peut dès lors construire une *courbe maîtresse* ou *courbe pilote* comme montré à la Figure 5.2.

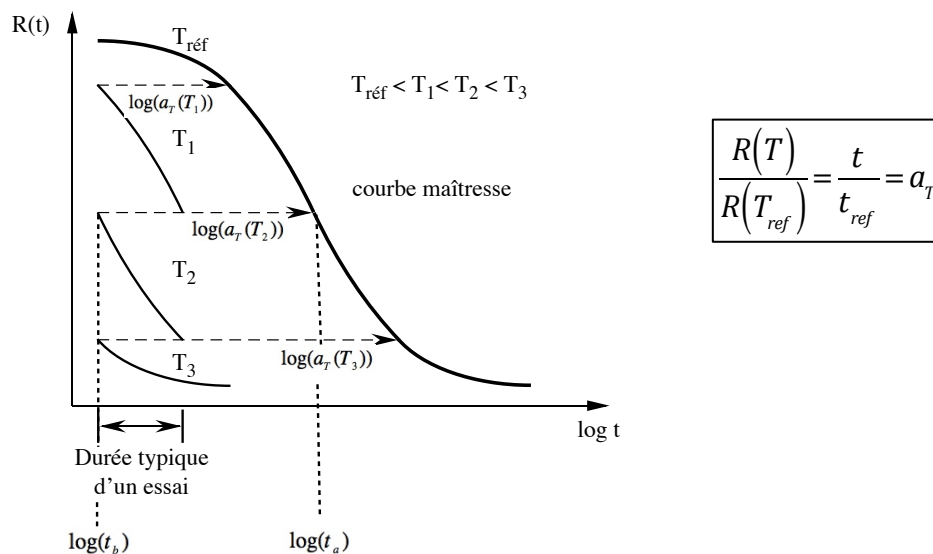


Figure 5.2. Illustration du principe de superposition temps-température. Construction de la courbe maîtresse (en gras) au moyen de mesures effectuées à différentes températures (traits minces).

On utilise le facteur de translation pour passer du comportement à un temps donné et une température de référence, à celui à un autre temps pour une autre température, par la formule suivante :

$$R(t, T) = R(t / a_T, T_{ref}) \quad (5.1)$$

Pratiquement, on obtient les relations suivantes :

$$\log \{ a_T (T_2 \rightarrow T_{ref}) \} = \log t_2 - \log t_{ref} = \log \{ t_2 / t_{ref} \} \quad \text{et} \quad a_T (T_2 \rightarrow T_{ref}) = t_2 / t_{ref} \quad (5.2)$$

Le facteur de translation est donc le temps requis pour obtenir une certaine réponse du matériau à une température  $T_2$ , divisé par le temps requis pour obtenir la même réponse à la température de référence. On a aussi :

$$a_T (T_3 \rightarrow T_1) = a_T (T_3 \rightarrow T_2) a_T (T_2 \rightarrow T_1) \quad (5.3)$$

La variation de  $a_T$  est décrite schématiquement à la Figure 5.3, en fonction de  $1/T$ . Il faut noter que si la température  $T$  est plus grande que  $T_{ref}$ , comme à la Figure 5.2, alors  $R(T)$  sera plus faible, donc  $a_T$  sera inférieur à 1, et donc  $\text{Log}(a_T)$  sera négatif.

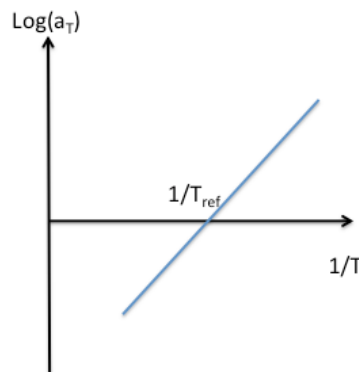


Figure 5.3. Variation de  $a_T$  en fonction de la température.

Différentes relations ont été trouvées pour exprimer la variation de  $a_T$  avec la température. Les plus utilisées sont celle d'Arrhenius, et celle de William, Landel et Ferry. Ces équations sont présentées dans les paragraphes suivants.

## 5.2 RELATION D'ARRHENIUS

La loi d'Arrhenius (introduite en 1889 par le chimiste Suédois du même nom) est utilisée dans la cadre de la rhéologie, pour des conditions éloignées de la température de transition vitreuse  $T_g$ . La viscosité et la viscoélasticité d'un matériau résultent de sa mobilité moléculaire et/ou de la mobilité de défauts internes. Il s'agit de phénomènes de transport à très petite échelle, dans lesquels une entité change de position dans l'espace. Ces mouvements sont gouvernés par des facteurs tels que la probabilité qu'une place soit disponible, l'énergie requise pour passer d'un état à un autre et la probabilité pour que l'événement ait lieu. Ces facteurs sont affectés par la température qui régit le "débit". Le débit est la caractéristique temporelle des phénomènes. Il y a une équivalence entre le temps et la température dans la représentation du comportement du matériau :

$$k(T) = A \exp \left\{ -\frac{E_a}{RT} \right\} \quad (5.4)$$

où  $k$  est une propriété temporelle (i.e., un taux ou cinétique de réaction) en  $[s^{-1}]$ ,  $A$  un facteur de fréquence,  $R$  la constante de Boltzmann et  $T$  la température en  $[K]$  et  $E_a$  l'énergie d'activation. Ainsi, l'énergie d'activation étant généralement positive, quand  $T$  augmente, la propriété  $k$  augmente également et le temps correspondant diminue. La loi d'Arrhenius est utilisée pour décrire le comportement en température de nombreuses propriétés dont les suivantes.

- Phénomène de transport de base : la diffusion, avec le coefficient  $D$  (en  $[cm^2/s]$ )

$$D = -A \exp \left( \frac{Q}{kT} \right) \quad (5.5)$$

- Par analogie, la relaxation de contrainte peut être décrite comme une "diffusion" d'état de contrainte :

$$\dot{\sigma} = -A \exp \left( \frac{v\sigma}{kT} \right) \quad (5.6)$$

- La viscosité  $\eta$  est par analogie la réciproque de la fluidité :

$$\frac{1}{\eta} = A \exp\left(-\frac{B}{T}\right) \quad (5.7)$$

- Le temps de relaxation  $\tau$  :

$$\frac{1}{\tau} = A \exp\left(-\frac{B}{T}\right) \quad (5.8)$$

### 5.3 RELATION ENTRE LA TEMPERATURE ET LA MOBILITE MOLECULAIRE

La viscosité  $\eta$  et le temps de relaxation  $\tau$  sont des mesures de la mobilité moléculaire. Ils dépendent par conséquent de la diffusion des molécules ou des groupes de molécules, et les mécanismes régissant  $\eta$  et  $\tau$  sont liés. Soit la viscosité dont la variation avec la température est caractérisée par :

$$\frac{1}{\eta} = A e^{-\frac{B}{T}} = e^{A'} e^{-\frac{B}{T}} \Rightarrow \ln \eta = -A' + \frac{B}{T} \quad (5.9)$$

Ceci est valable pour n'importe quelle température, et on a :

$$\ln \eta_1 - \frac{B}{T_1} = \ln \eta_2 - \frac{B}{T_2} = -A' = \text{const} \quad (5.9)$$

On aboutit à une relation du type Arrhenius représentée à la Figure 5.4 :

$$\ln \eta_2 - \ln \eta_1 = B \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) = \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1} \right) \quad (5.10)$$

La translation  $a_T$  peut aussi s'exprimer comme un ratio entre le temps d'écoulement à une certaine température, par rapport au temps d'écoulement pour atteindre le même résultat à la température de référence :

$$a_T = \frac{\eta(T)}{\eta(T_{ref})} \quad \text{ou} \quad \log a_T = \log \left( \frac{\eta(T)}{\eta(T_{ref})} \right) \quad (5.11)$$

On peut donc aussi écrire que :

$$\frac{\eta(T)}{\eta(T_{ref})} = \exp \left\{ \frac{E_a}{R} \left( \frac{1}{T} - \frac{1}{T_{ref}} \right) \right\} = a_T \quad (5.12)$$

Cette relation s'applique aux métaux, céramiques, polymères, verres, ...

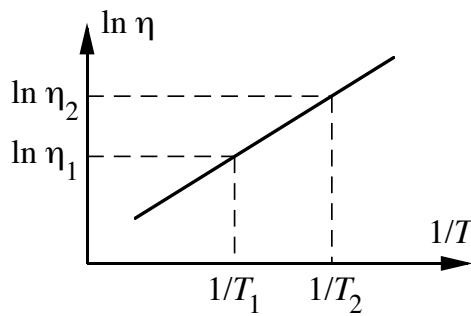


Figure 5.4. Représentation graphique d'une relation du type d'Arrhenius pour la viscosité.

#### 5.4 L'EQUATION WLF ET THEORIE DU VOLUME LIBRE

Dans les conditions proches de la transition vitreuse  $T_g$  la loi d'Arrhenius n'est plus en mesure de décrire le comportement visqueux. En 1955 Williams, Landel et Ferry ont dérivé une équation appelée WLF reposant sur celle de Doolittle (1951), qui prend comme principe de base que la mobilité moléculaire est une fonction du volume libre :

$$\eta = a' e^{b'/f} \quad (5.13)$$

où  $f$  est la fraction de volume libre et  $a'$  et  $b'$  sont des constantes. Aux températures  $T_1$  et  $T_2$ , on a la relation (trouvée empiriquement à partir de données sur la paraffine) :

$$\frac{\eta_2}{\eta_1} = \exp \left( b' \left( \frac{1}{f_2} - \frac{1}{f_1} \right) \right) \quad (5.14)$$

Il faut trouver une expression pour le volume libre. La théorie du volume libre est une description de la structure d'un matériau amorphe comme un verre inorganique ou un polymère. Cette théorie est fondée sur le fait que les molécules n'occupent pas tout le volume à leur disposition. Le volume libre est le volume inoccupé par les molécules, c'est-à-dire "l'espace vide" entre celles-ci. A l'état caoutchoutique ( $T > T_g$ ), ce volume est élevé. Plus la température baisse, plus ce volume diminue. Ceci est vrai jusqu'à ce que la température atteigne un seuil "critique" au-delà duquel le volume libre reste constant. Cette température correspond à  $T_g$ , température de transition vitreuse. La Figure 5.5 représente le volume spécifique d'un verre, somme du volume spécifique occupé par les molécules (droite du bas) et le volume à disposition (droites du haut).

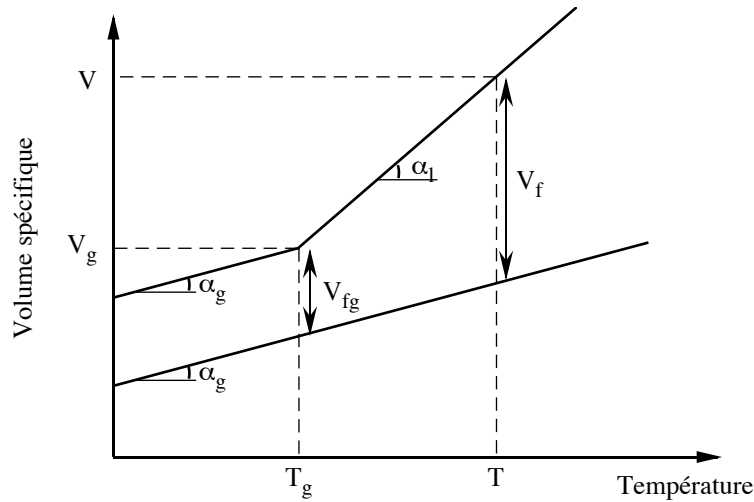


Figure 5.5. Variation du volume spécifique d'un verre (courbe supérieure) et de ses molécules (courbe inférieure) et définition graphique du volume libre qui est la distance entre les deux courbes.

Le volume par unité de masse occupé par les molécules augmente à cause de l'expansion thermique due au mouvement brownien. Il faut faire attention à l'échelle verticale sur la Figure 5.5 qui est en  $[m^3/kg]$ , il s'agit de volume spécifique.

Le volume disponible par unité de masse est  $V = V_0 + V_f$ , où  $V_0$  est le volume spécifique occupé par les molécules et  $V_f$  le volume spécifique libre. En utilisant les équations des droites, on obtient la relation :

$$V_f = V_{fg} + (T - T_g) \left( \frac{\partial N}{\partial T} \right)_p \quad (5.15)$$



$V_{fg}$  est le volume libre à la température de la transition vitreuse. Pour  $T > T_g$ , la dérivée du volume par rapport à la température par unité de masse vaut:  $\Delta\alpha = (\alpha_l - \alpha_g)$ .  $\alpha_l$  et  $\alpha_g$  sont les coefficients d'expansion thermique et sont représentés à la Figure 5.5.

On divise la relation obtenue par le volume disponible  $V$  :

$$f = f_g + (T - T_g) \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (5.16)$$

et on pose :

$$\Delta\alpha = \frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial T} \right)_p \quad (5.17)$$

d'où

$$f = f_g + (T - T_g) \Delta\alpha \quad \text{pour } T > T_g \quad (5.18)$$

En posant que  $b'$  vaut 1 et  $T_{réf}$  vaut  $T_g$ , on trouve :

$$\ln \left( \frac{\eta}{\eta_g} \right) = \frac{-\frac{1}{f_g} (T - T_g)}{\cancel{f_g} / \Delta\alpha + (T - T_g)} \Rightarrow \log_{10} \left( \frac{\eta}{\eta_g} \right) = \frac{-\frac{1}{2.303 f_g} (T - T_g)}{\frac{f_g}{\Delta\alpha} + (T - T_g)} \quad (5.19)$$

Or

$$a_t = \frac{\eta(T)}{\eta(T_{réf})} \quad (5.20)$$

donc :

$$\log_{10} (a_T) = -\frac{c(T - T_g)}{d + (T - T_g)} \quad (5.21)$$

Les valeurs des constantes  $c$  et  $d$  sont pour  $T_g < T < T_g + 100$  :

$$c = \frac{1}{2.303f_g} \approx 17.44 \quad \text{et} \quad d = \frac{f_g}{\Delta\alpha} \approx 51.6 \quad (5.22)$$

Une meilleure approximation utilise:  $T^* = T_g + 50^\circ\text{C}$ ,  $c = 8.9$  et  $d = 102$ .

Cette équation s'applique aux polymères, aux liquides organiques, ainsi qu'aux verres inorganiques.

## 5.5 INFLUENCE DE LA PRESSION SUR LE COMPORTEMENT VISCOELASTIQUE

Une augmentation de la pression réduit le volume et donc la mobilité moléculaire (Figure 5.6). Elle affecte le comportement viscoélastique du matériau. La dépendance est analogue à la relation WLF :

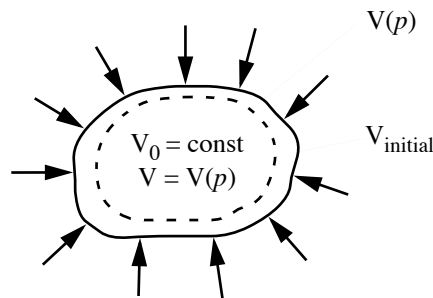


Figure 5.6. Une augmentation de la pression réduit le volume et donc la mobilité moléculaire.

$$\log a_p = \frac{\left( \frac{B}{2.303f_0} \right) (p - p_0)}{\frac{f_0}{\chi} - (p - p_0)} \quad (5.23)$$

où  $p_0$  représente une pression de référence et  $\chi$  représente la compression du volume libre :

$$\chi = -\frac{1}{V} \left( \frac{\partial V}{\partial P} \right)_T \quad (5.24)$$

La compressibilité  $\chi$  est dépendante de la pression et de la température. Un accroissement de la température augmente  $\chi$ , alors qu'un accroissement de pression diminue cette compressibilité. Avec la pression, le volume spécifique diminue, comme le montre la Figure 5.7. Nous reviendrons sur ce diagramme d'état au Chapitre 7 dans le cas des liquides.

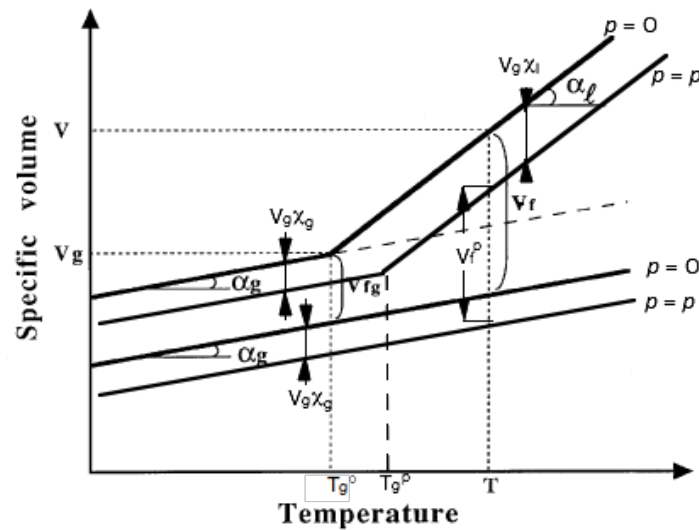


Figure 5.7. Représentation de la variation du volume spécifique en fonction de la température pour deux pressions données.



**DEUXIEME PARTIE**  
**RHÉOLOGIE DES LIQUIDES**

---

## 6 CLASSES DE LIQUIDES

L'introduction de nouveaux concepts a permis de caractériser le comportement des solides et de les étudier. Pour les liquides, nous allons aussi avoir besoin de concepts permettant de les définir selon leurs caractéristiques. Le paramètre le plus important est la viscosité. Elle dépend de la structure et de la composition du matériau étudié. L'étude des liquides est importante, car on trouve pratiquement toutes les classes de matériaux sous forme liquide, et c'est souvent sous cette forme qu'on les met en œuvre. En exemple, on peut citer :

- les métaux fondus,
- les céramiques fondues ou sous forme de suspensions,
- les polymères fondus,
- le béton (qui n'a pas encore pris),
- la nourriture (margarine, mayonnaise, ketchup, ...),
- beaucoup d'autres (liquides biologiques, ...).

Il faut cependant se souvenir que tous les matériaux, même ceux qui sont apparemment solides, fluent et donc s'écoulent. Les temps d'écoulement sont certes très longs. La distinction entre solide et liquide faite ici est donc arbitraire.

### 6.1 CLASSIFICATION ET MISE EN ŒUVRE DES POLYMERES

Les classifications permettent en général de cerner un comportement. Il y a plusieurs critères de classements, comme par exemple la microstructure et la mise en œuvre.

#### 6.1.1 Structure

On distingue trois types de polymères représentés à la Figure 6.1. La Figure 6.1a représente un polymère linéaire, la Figure 6.1b un polymère ramifié et la Figure 6.1c un polymère réticulé (réseau).

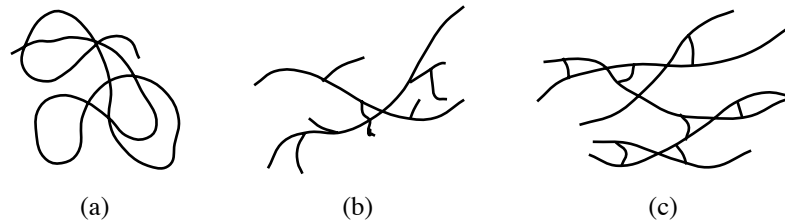


Figure 6.1. Représentation schématique des trois types de polymères : (a) linéaire, (b) ramifié et (c) réticulé.

Par exemple, un ski est composé de plusieurs polymères : la semelle est en PE (polyéthylène) de très haute masse moléculaire, avec des chaînes linéaires composées d'environ 3 millions d'unités répétitives. Sa viscosité est très élevée. Le cœur du ski peut être en résine époxy (formé par réticulation de monomères) renforcée par des fibres de verre.

### 6.1.2 Mise en œuvre

La mise en œuvre des thermoplastiques suit un procédé classique, décrit à la Figure 6.2.

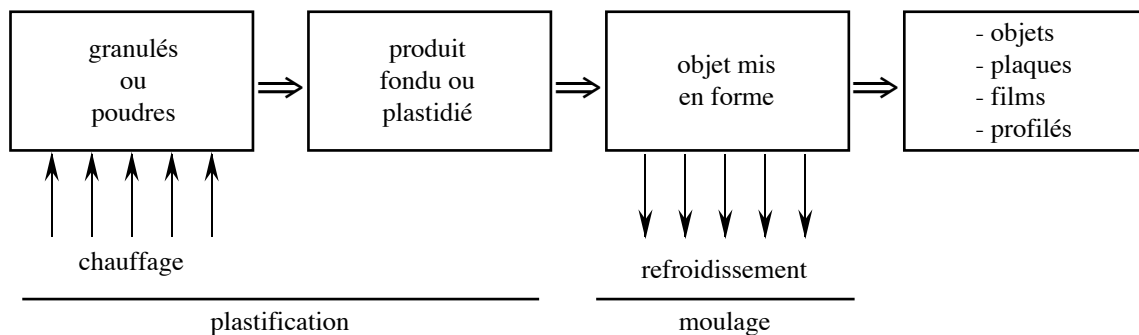


Figure 6.2. Représentation schématique du procédé classique de mise en œuvre des thermoplastiques.

La mise en forme se fait suivant diverses méthodes. On peut citer notamment le moulage par injection, ainsi que l'extrusion qui sont les moyens les plus utilisés pour les articles fabriqués avec des polymères thermoplastiques. L'avancée du front de solidification lors du moulage par injection est décrite à la Figure 6.3.

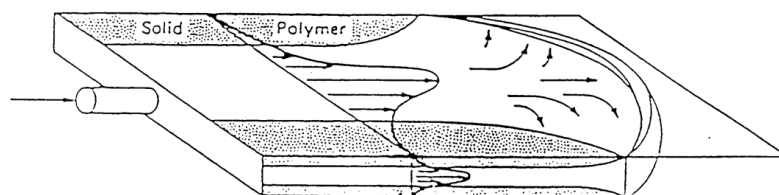


Figure 6.3. Représentation schématique de l'avancée du front de solidification lors du moulage par injection.



La Figure 6.4 montre la progression du front du fluide solidifié dans le moule. La progression du front peut être décrite par des équations mathématiques. Pour plus d'informations, on peut se référer au polycopié *Phénomènes de transfert* (Hofmann, EPFL). On peut aussi consulter le livre suivant : Karger-Kocsis, *Polypropylene structure, blends and composites*, Chapman and Hall, 1995, Cambridge, ainsi que le polycopié du cours de mise en œuvre des polymères.

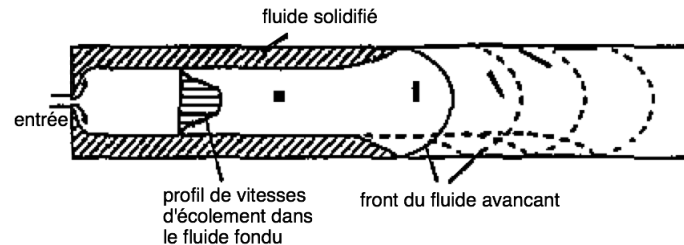


Figure 6.4. Représentation schématique de la progression du front du fluide solidifié dans le moule.

## 6.2 CLASSIFICATION DES COURBES D'ÉCOULEMENT

L'écoulement d'un matériau fondu peut être caractérisé par une courbe d'écoulement qui reporte la contrainte de cisaillement en fonction de la vitesse de cisaillement. Il faut considérer plusieurs types de fluides.

### 6.2.1 Fluides Newtoniens

Un fluide Newtonien suit un comportement simple, décrit par une loi proposée par Newton :

$$\tau = \eta \dot{\gamma} \quad (6.1)$$

où la viscosité  $\eta$  est indépendante de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$ . Ce comportement est représenté à la Figure 6.5, avec  $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$ . Les viscosités représentent les pentes des droites.

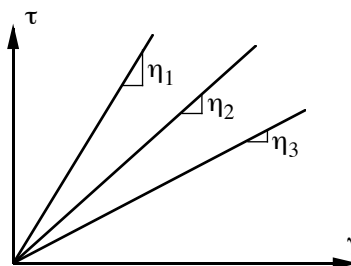


Figure 6.5. Courbes d'écoulement (contrainte-taux de cisaillement) pour trois fluides newtoniens avec  $\eta_1 > \eta_2 > \eta_3$ .

On peut également écrire la relation sous la forme logarithmique :

$$\log \tau = \log \eta + \log \dot{\gamma} \quad (6.2)$$

La Figure 6.6 représente cette relation. L'ordonnée à l'origine vaut  $\log \eta$ , la pente est unitaire. Attention, la position des axes peut être trompeuse. La représentation de la Figure 6.6 est une courbe d'écoulement.

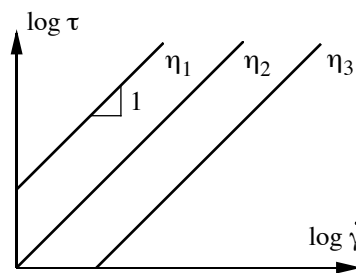


Figure 6.6. Représentation des courbes d'écoulement de la Figure 6.5 en logarithme.

L'eau et la résine époxy avant durcissement sont de parfaits exemples de liquides Newtoniens.

## 6.2.2 Fluides non-Newtoniens

On rappelle la loi introduite au Chapitre 1, valable pour un fluide non-Newtonien :

$$\tau = \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma} \quad (6.3)$$

où la viscosité dépend de la vitesse de cisaillement. En dehors de cette relation générale, il existe diverses lois qui modélisent plus ou moins correctement le comportement des fluides non-Newtoniens. On utilise fréquemment la loi de puissance :

$$\tau = \kappa \dot{\gamma}^n \quad (6.4)$$

$$\log \tau = \log \kappa + n \log \dot{\gamma} \quad (6.5)$$

La viscosité est décrite par les coefficients  $\kappa$  et  $n$ . L'unité de  $\kappa$  dépend de la valeur de  $n$ .  $\kappa$  est plus communément appelé consistance, et  $n$  indice de la loi de puissance ou de indice de pseudo-plasticité. D'autres modèles de lois seront exposés en détail au Chapitre 7.

Le comportement général d'un liquide est décrit à la Figure 6.7.

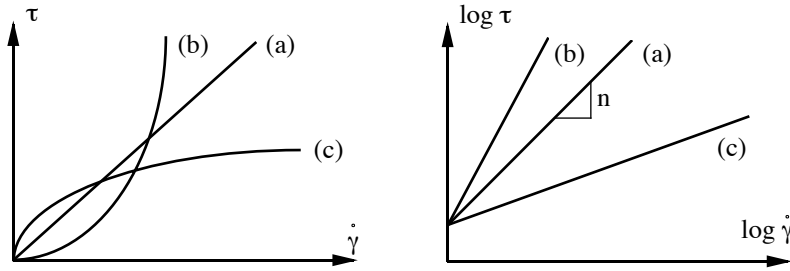


Figure 6.7. Courbes contrainte - taux de cisaillement pour (a) un fluide newtonien, (b) dilatant et (c) pseudoplastique.

La courbe (a) représente un fluide Newtonien ( $n = 1$ ), la courbe (b) décrit un fluide dilatant ( $n > 1$ ) et la courbe (c) montre un fluide pseudoplastique ( $n < 1$ ). Les ordonnées à l'origine des courbes log-log de la Figure 6.7 ont la valeur de  $\log \kappa$ . Il est à noter que le terme rhéofluidifiant est synonyme du terme pseudoplastique, et le terme rhéoépaississant, synonyme du terme dilatant.

La plupart des thermoplastiques sont pseudoplastiques tandis que les suspensions de particules à l'origine des céramiques peuvent être dilatantes.

### 6.3 LA VISCOSITE

La viscosité dynamique (ou tout simplement viscosité) est le rapport d'une contrainte et d'une vitesse de déformation :

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} \quad \text{ou} \quad \eta = \frac{\sigma}{\dot{\varepsilon}} \quad (6.6)$$

En prenant l'exemple de la loi de puissance, on aboutit à une relation permettant de relier la viscosité à la vitesse de cisaillement :

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{\kappa \dot{\gamma}^n}{\dot{\gamma}} = \kappa \dot{\gamma}^{n-1} \quad (6.7)$$

Lorsque  $n$  vaut 1, le fluide est Newtonien et on peut remplacer  $\kappa$  par  $\eta$ . Cette relation est représentée par la Figure 6.8, qui décrit des courbes de viscosités.

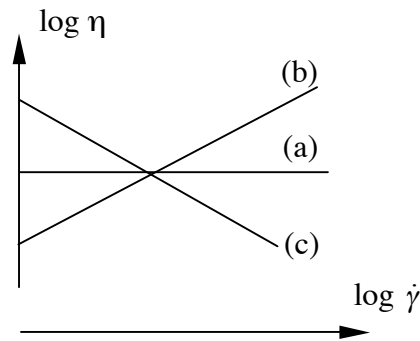


Figure 6.8. Courbes de viscosité pour (a) un fluide newtonien, (b) dilatant et (c) pseudoplastique.

Les droites a, b et c de la Figure 6.8 décrivent les mêmes matériaux, dans le même ordre qu'à la Figure 6.7.

#### 6.4 COURBE DE VISCOSITE DES POLYMERES : CAS GENERAL

Dans les polymères, une contrainte impose une orientation préférentielle des chaînes, favorisée par la présence d'enchevêtrements. L'état d'orientation dépend de la vitesse à laquelle les molécules peuvent s'enchevêtrer.

Le temps d'enchevêtrement est long  $\Rightarrow$  La structure reste orientée plus longtemps.

Le temps d'enchevêtrement est court  $\Rightarrow$  La structure retrouve rapidement un équilibre.

En observant la courbe de viscosité d'un polymère chargé, on peut distinguer tous les types de comportement en fonction de la vitesse de cisaillement. Une telle courbe est dessinée à la Figure 6.9.

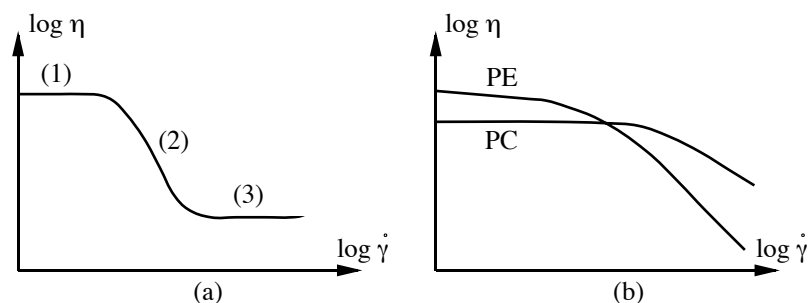


Figure 6.9. (a) Courbe de viscosité typique comportant tous les types de comportement : (1) et (3) plateau Newtonien, (2) pseudo plastique. (b) courbes de viscosité pour deux polymères (PE et PC) qui possèdent uniquement les deux premiers comportements (Newtonien et pseudoplastique).

Les chiffres sur la Figure 6.9a correspondent à un comportement :

- 1) *newtonien* : la vitesse de déformation est assez lente pour que les molécules puissent trouver une position d'équilibre (région newtonienne basse),
- 2) *pseudoplastique* : la vitesse de sollicitation est plus grande ou égale à la vitesse de relaxation,
- 3) *newtonien* : la vitesse de sollicitation est beaucoup plus grande que la vitesse de relaxation, il s'ensuit une orientation des molécules parallèlement à la direction de cisaillement (région newtonienne haute).

La variation de la viscosité  $\eta$  en fonction de la vitesse de cisaillement dépend de la structure chimique, en particulier de :

- la flexibilité des chaînes,
- la ramification des chaînes,
- du poids moléculaire ( $M_w$ ),
- de la distribution de  $M_w$ .

Chaque technique de mise en œuvre peut se caractériser par une gamme de vitesses de cisaillement qui lui est propre. Cette gamme est approximativement représentée à la Figure 6.10.

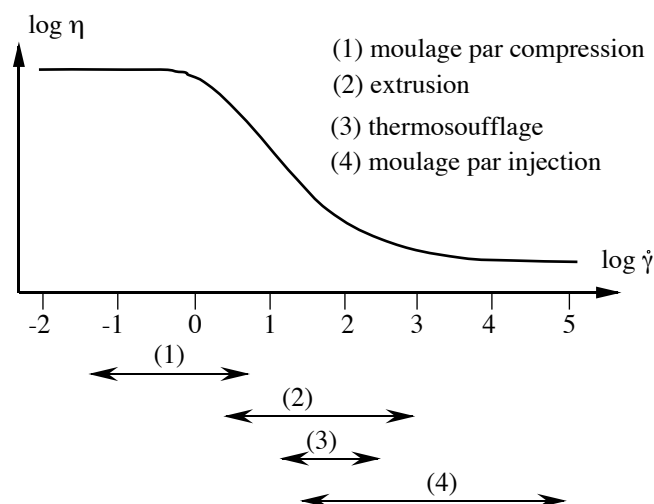


Figure 6.10. Courbe de viscosité typique où l'on a reporté la gamme de taux de cisaillement pour quatre procédés de mise en œuvre.



## 7 RELATIONS CONSTITUTIVES

Ce chapitre décrit les différentes méthodes permettant de modéliser les comportements des fluides non-newtoniens, sur la base de lois qui s'en rapprochent le plus.

### 7.1 EXEMPLES DE RELATIONS

Il existe de nombreuses expressions pour prédire le comportement rhéologique des fluides. Les lois les plus utilisées sont présentées dans ce chapitre.

Le comportement de la viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement est souvent décrit à l'aide des trois paramètres suivants :

- $\eta_0 = \kappa$  : viscosité à cisaillement faible, où le fluide se comporte comme un fluide newtonien.
- $\eta_\infty$  : viscosité à cisaillement infini, c'est-à-dire lorsque  $\dot{\gamma} \rightarrow \infty$ .
- $\lambda_c$  : temps de relaxation.

Ces trois valeurs sont représentées sur la Figure 7.1.

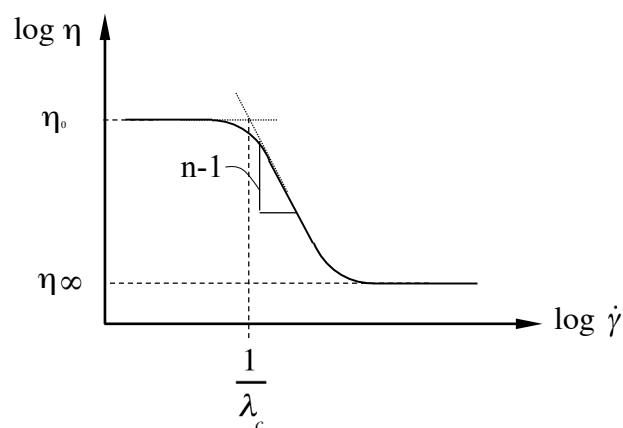


Figure 7.1. Représentation, sur une courbe de viscosité, de la viscosité à cisaillement nul, à cisaillement infini et du temps de relaxation.

### 7.1.1 Loi de puissance

Cette loi qui a déjà été exposée dans le Chapitre 6, permet de décrire le comportement d'un matériau dont la contrainte et la viscosité suivent les lois :

$$\begin{aligned}\tau &= \kappa \dot{\gamma}^n \\ \eta &= \kappa \dot{\gamma}^{n-1}\end{aligned}\tag{7.1}$$

Notons que l'on trouve parfois cette loi sous la forme :

$$\eta = \kappa \left( \frac{\dot{\gamma}}{\dot{\gamma}_0} \right)^{n-1}\tag{7.2}$$

où  $\dot{\gamma}_0$  est une vitesse de cisaillement de référence, par exemple  $1 \text{ s}^{-1}$ . Cette loi se trouve aussi sous forme logarithmique :

$$\log \eta = \log \kappa + (n - 1) \log \dot{\gamma}\tag{7.3}$$

Elle est décrite à la Figure 7.2.

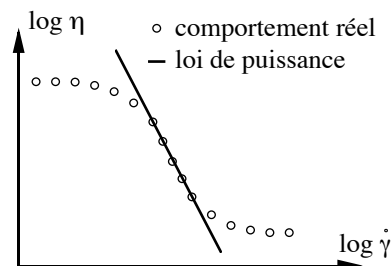


Figure 7.2. Courbe de viscosité : comparaison entre le comportement réel et la loi de puissance.

Les désavantages de la loi de puissance sont :

- L'unité de  $\kappa$  dépend de la valeur de  $n$
- Elle ne décrit pas un polymère réel avec les régions newtoniennes hautes et basses.



### 7.1.2 Modèle de CARREAU

Ce modèle permet d'affiner la loi de puissance, il est caractérisé par l'équation :

$$\frac{\eta - \eta_{\infty}}{\eta_0 - \eta_{\infty}} = \left[ 1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{n-1}{2}} \quad (7.4)$$

Cette équation est représentée à la Figure 7.3.

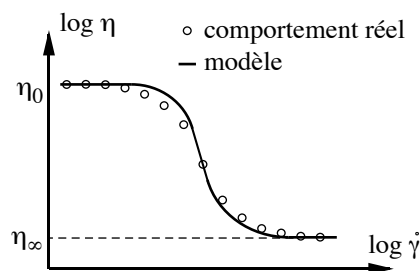


Figure 7.3. Courbe de viscosité : comparaison entre le comportement réel et le modèle de Carreau.

Le modèle de Carreau est une équation à 4 paramètres :  $\lambda_c, \eta_0, \eta_{\infty}, n$  où  $\lambda_c$  est un temps de relaxation,  $\eta_0$  est la viscosité à un cisaillement nul,  $\eta_{\infty}$  est la viscosité à un cisaillement infini et  $n$  est l'indice de pseudoplasticité.

- Si  $(\lambda_c \dot{\gamma})^2 \ll 1$ , alors  $\eta \rightarrow \eta_0$
- Si  $(\lambda_c \dot{\gamma})^2 \gg 1$ , alors  $\eta \rightarrow \eta_{\infty}$

Ce modèle ne décrit pas toujours bien la transition entre les plateaux newtoniens et la partie pseudoplastique ou rhéofluidifiante.

### 7.1.3 Modèle de CARREAU-YASHUDA

Ce modèle est une amélioration du modèle de Carreau. Son expression est la suivante :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[ 1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^k \right]^{\frac{(n-1)}{k}} \quad (7.4)$$

Par rapport au modèle de Carreau, on a l'introduction d'un cinquième paramètre ( $k$ ). Graphiquement, le coefficient  $k$  permet une transition plus progressive entre les plateaux newtoniens et la région pseudoplastique ou rhéofluidifiante. Ce modèle se rapproche parfaitement du comportement réel du fluide comme le montre la Figure 7.4.

Le modèle de Carreau est un cas particulier du modèle de Carreau-Yashuda où  $k$  vaut 2.

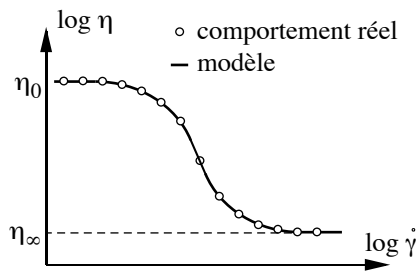


Figure 7.4. Courbe de viscosité : comparaison entre le comportement réel et le modèle de Carreau-Yashuda.

### 7.1.4 Autres modèles

Le modèle de *Cross* est défini par la relation :

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{1 + (K\dot{\gamma})^{1-n}} \quad (7.5)$$

Le modèle de Cross est une équation à quatre paramètres :  $\eta_0$ ,  $\eta_\infty$ ,  $K$ ,  $n$  où le coefficient  $K$  est une variable de temps caractéristique et  $n$  est une constante de pente.

Le modèle de *Ellis* est décrit par l'expression :

$$\frac{\eta}{\eta_0} = (1 + (K\dot{\gamma}))^{2(a-1)} \quad \text{ou} \quad \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{1 + (\tau/\tau_{1/2})^{a-1}} \quad (7.6)$$

avec  $\tau$  : cisssion et  $\tau_{1/2}$  : cisssion pour une viscosité  $\eta = \eta_0/2$ . Cette relation est schématisée à la Figure 7.5.

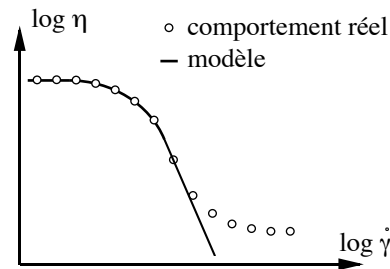


Figure 7.5. Courbe de viscosité : comparaison entre le comportement réel et le modèle de Ellis.

Le modèle de Ellis est une équation à trois paramètres,  $\eta_0$ ,  $K$ ,  $a$  où  $K$  est une constante de temps caractéristique et  $a$  est une constante de pente. Ce modèle est bien adapté pour des basses vitesses de cisaillement, car il ne prévoit pas le second plateau newtonien.

## 7.2 VISCOSITE EN FONCTION DE DIFFERENTS PARAMETRES

La viscosité dépend de plusieurs facteurs, tels que la vitesse de cisaillement, le temps de cisaillement, le poids moléculaire, la présence de particules solides, la température et la pression.

### 7.2.1 Vitesse de cisaillement : $\eta = \eta(\dot{\gamma})$

La dépendance de la viscosité à la vitesse de cisaillement a été étudiée aux paragraphes 6.3 et 7.1. Le comportement d'un fluide peut être classifié selon trois catégories :

#### - Comportement newtonien

$\eta$  ne dépend pas de  $\dot{\gamma}$ . Il concerne les matériaux qui ont un temps de retour à une position d'équilibre très court ou qui subissent une vitesse de cisaillement très faible ou très élevée.

- *Comportements non newtonien*

- *dilatant ou rhéo-épaississant* :  $\eta$  augmente quand  $\dot{\gamma}$  augmente. Cela concerne les matériaux qui contiennent certains types de renforts. Ce comportement est dû au frottement interne entre les particules.
- *pseudoplastique ou rhéo-fluidifiant* :  $\eta$  diminue quand  $\dot{\gamma}$  augmente. Cela concerne les matériaux contenant de longues chaînes qui s'orientent conformément au champ de cisaillement. Ce comportement est caractéristique de la plupart des polymères et des polymères renforcés.

Ces trois comportements sont schématisés à la Figure 7.6.

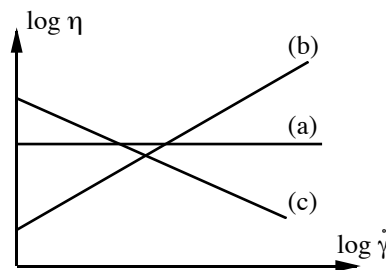


Figure 7.6. Courbes de viscosité avec les trois comportements : (a) newtonien, (b) dilatant et (c) pseudoplastique.

### 7.2.2 Temps de cisaillement : $\eta = \eta(t)$

Pour des liquides non-newtoniens, la viscosité peut dépendre de la durée pendant laquelle le cisaillement est appliqué de façon irréversible ou non :

- Irréversible : dû à des changements permanents dans la microstructure.
- Réversible :

*Thixotropie* : destruction de la structure plus *rapide* que sa reconstitution.

*Rhéopéxie* : destruction de la structure plus *lente* que sa reconstitution.

Ces comportements se traduisent par des hystérèses sur un diagramme contrainte de cisaillement - vitesse de cisaillement (Figure 7.7a), ou sur un diagramme viscosité - temps (Figure 7.7b).

Il ne faut pas conclure de la Figure 7.7 que thixotropie va nécessairement avec rhéofluidifiant et rhéopéxie avec rhéoépaississant.

Deux exemples de comportement typiquement thixotropique sont la peinture et le yoghourt.

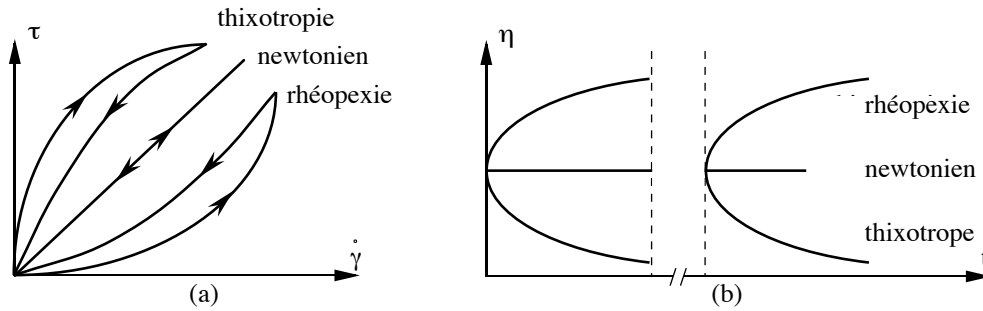


Figure 7.7. Représentation des comportements newtonien, thixotrope et rhéopexique sur des graphes contrainte - taux de cisaillement (a) et viscosité en fonction du temps, le taux de cisaillement étant constant (b). Il est à noter que les trois types de comportement sont réversibles (ce que l'on a essayé de montrer en (b)).

### 7.2.3 Poids moléculaire : $\eta = \eta(M_w)$

Il existe un poids moléculaire critique,  $M_w = M_c$  à partir duquel les effets d'enchevêtrement se font sentir. Pour le polystyrène (PS),  $M_c \approx 38'000$  g/mol et pour le polyéthylène à faible densité (LDPE),  $M_c \approx 4'000$  g/mol. Pour la plupart des plastiques techniques, on a  $M_w \gg M_c$ . Ce poids critique est représenté à la Figure 7.8a. La dépendance de la viscosité par rapport au poids moléculaire est schématisé à la Figure 7.8b.

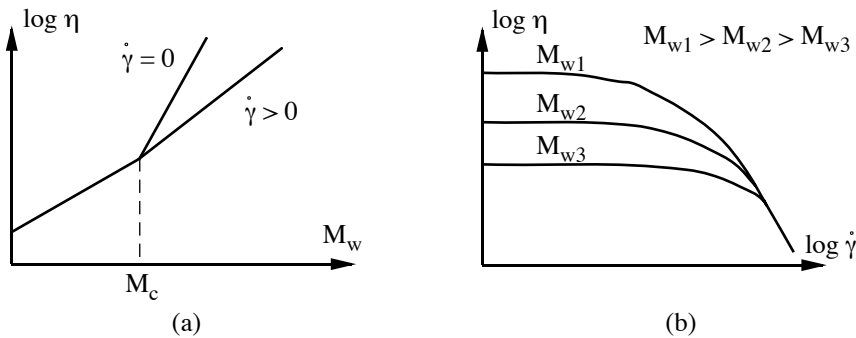


Figure 7.8. Effet du poids moléculaire sur la viscosité (a) sur un graphique viscosité - poids moléculaire pour deux taux de cisaillement et (b) sur une courbe de viscosité avec trois poids moléculaires différents.

Les deux courbes présentées montrent la dépendance de  $\eta$  à la masse moléculaire. La courbe décrite à la Figure 7.8a est caractérisée par les équations :

$$- \eta_0 = K_1 M_w \quad \text{si} \quad M_w < M_c \quad (7.7)$$

$$- \eta_0 = K_2 M_w^{3.4} \quad \text{si} \quad M_w > M_c \quad (7.8)$$

Si on augmente la vitesse de cisaillement, la création de nouveaux enchevêtrements ne peut se faire aussi vite que les désenchevêtrements, donc il n'y a plus compensation.

A de faibles poids moléculaires, on a peu d'enchevêtrements, donc il faut des vitesses de cisaillement plus élevées pour obtenir une orientation suffisante des chaînes du polymère. La partie newtonienne est plus étendue pour de faibles  $M_w$ .

#### 7.2.4 Ajout de particules : $\eta = \eta(\phi)$

De nombreux fluides sont chargés de particules (on parle alors de *suspensions*) qui peuvent influencer de façon considérable leur viscosité. Dans les polymères on ajoute souvent de la craie, du sable, des particules de  $\text{TiO}_2$ , du noir de carbone, etc., mais également des fibres de verre, de carbone, d'aramide (KEVLAR), de lin, etc. La taille des particules peut varier de quelques nanomètres jusqu'à plusieurs centaines de micromètres. Le diamètre des fibres varie typiquement entre 5 et 25  $\mu\text{m}$  et leurs longueurs entre 0.2 et 50 mm.

Les phénomènes en jeu sont traités en détail aux Chapitres 10 et 11.

#### 7.2.5 Température et pression : $\eta = \eta(T; P)$

##### *Loi d'Arrhenius $\eta = \eta(T)$*

Comme décrit précédemment au Chapitre 5, la dépendance de la viscosité à la température s'exprime par une relation d'Arrhenius lorsque la vitesse de cisaillement tend vers 0 :

$$\eta_0(T) = A e^{\frac{E_a}{RT}} \quad (7.9)$$

$A$  est un facteur de fréquence qui dépend du polymère et de sa masse moléculaire  $M_w$ ,  $E_a$  est l'énergie d'activation pour l'écoulement visqueux et  $R$  est la constante des gaz parfaits. Notons que la température s'exprime en Kelvin.

Cette équation peut se mettre sous forme logarithmique :

$$\ln \eta_0(T) = \ln A + \frac{E_a}{R} \frac{1}{T} \quad (7.10)$$

Cette relation est représentée à la Figure 7.9.

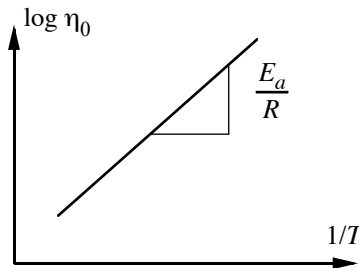


Figure 7.9. Représentation graphique de la loi d'Arrhenius. Le logarithme népérien de la viscosité est rapporté à l'inverse de la température absolue.

L'énergie d'activation augmente avec :

- la taille des groupes latéraux,
- la rigidité de la chaîne principale.

Elle diminue avec :

- l'augmentation de la vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  à cause de l'orientation des molécules imposées par le cisaillement.

Le Tableau 7.1 présente quatre polymères en montrant leur structure et la valeur de l'énergie d'activation pour l'écoulement visqueux.

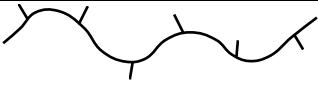

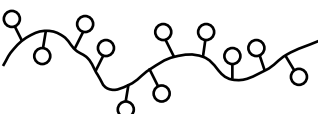
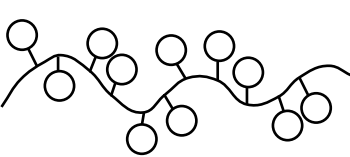
La viscosité dépend par ailleurs de la contrainte de cisaillement ou de la vitesse de cisaillement.

Ceci donne :

- pour une contrainte de cisaillement  $\tau$  constante :  $\eta = B \exp\left(\frac{E_\tau}{RT}\right)$  (7.11)

- pour une vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  constante :  $\eta = C \exp\left(\frac{E_\gamma}{RT}\right)$  (7.12)

Tableau 7.1 Valeurs de l'énergie d'activation et structure de quatre polymères.

polymère	Structure	énergie d'activation $E_a$
HDPE		28 kJ/mol
LDPE		49 kJ/mol
PP		40 kJ/mol
PS		108 kJ/mol

L'indice de l'énergie d'activation indique quel cas est étudié, c'est-à-dire quel terme est constant. La variation de la vitesse de cisaillement par rapport à la température pour des contraintes appliquées constantes est représentée à la Figure 7.10.

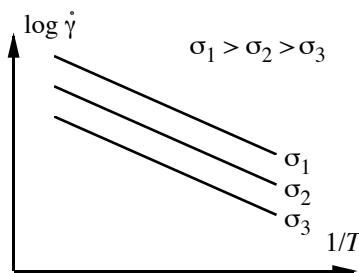


Figure 7.10. Représentation de la variation de la vitesse de cisaillement par rapport à la température pour des contraintes appliquées constantes.

A noter que la dépendance de la viscosité avec la température change quand on s'approche de la transition vitreuse  $T_g$  du matériau. Il est alors préférable de suivre des lois de type WLF, comme montré au paragraphe 7.3.

**Pression :  $\eta = \eta(P)$**

La variation due à la pression est exprimée par la relation :

$$\eta_0(P) = a \exp\{\chi P\} \quad (7.13)$$



où  $a$  et  $\chi$  sont des constantes, cette dernière étant appelée la compressibilité. L'expression est décrite à la Figure 7.11.

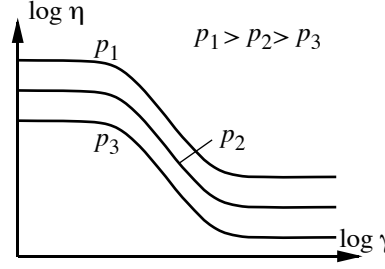


Figure 7.11. Courbe de viscosité : dépendance de la viscosité à la pression.

En combinant la dépendance de la viscosité à la température et à la pression, on obtient :

$$\eta_0(T;P) = D \exp \left\{ \frac{E_a}{RT} + \chi P \right\} \quad (7.14)$$

où  $D$  est une constante.

### 7.3 CONCEPT DU VOLUME LIBRE APPLIQUE AUX LIQUIDES

#### 7.3.1 Phénoménologie

On peut appliquer le concept du volume libre (voir paragraphe 5.4) pour trouver une dépendance de la viscosité à la pression et à la température. Dans les conditions proches de la température  $T_g$ , la viscosité augmente et la loi d'Arrhenius ne s'applique plus correctement car d'autres énergies entrent en jeu. Considérons la Figure 7.12 déjà vue au Chapitre 5. Le volume  $V$  (ou volume spécifique comme sur la figure) à une pression  $P$  est donné par la somme du volume occupé  $V_0$  et du volume libre  $V_f$  en fonction du coefficient d'expansion thermique et la compressibilité du matériau liquide ( $\alpha_l$  et  $\chi_l$  sur la figure) et du solide vitreux ('glass',  $\alpha_g$  et  $\chi_g$ ) :

$$V = V_0 + V_f = V_0 + V_{fg} + V_g \left[ (\alpha_l - \alpha_g)(T_g^P - T_g^0) - p(\chi_l - \chi_g) \right] \quad (7.15)$$



$$\log \frac{\eta}{\eta_g} = \frac{-\frac{1}{f_g \cdot 2.303} (T - T^*)}{\frac{f_g}{\Delta \alpha} + (T - T^*)} = \frac{-C_1 (T - T^*)}{C_2 + (T - T^*)} \quad (7.19)$$

Où  $T^* = T_g$ . Si on considère des valeurs typiques pour  $f_g$  de 2.5% et pour  $\Delta \alpha$  de  $4.5 \cdot 10^{-4}$  alors on a :

$$C_1 = \frac{1}{f_g \cdot 2.303} = 17.4 \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{f_g}{\Delta \alpha} = 51.6^\circ\text{C} \quad (7.20)$$

Une meilleure approximation utilise la transformation  $T^* = T_g + 50^\circ\text{C}$ , avec  $C_1 = 8.9$  et  $C_2 = 102^\circ\text{C}$  :

$$\log \eta = 13 - \frac{8.9 (T - (T_g + 50))}{102 + (T - (T_g + 50))} \quad (7.21)$$

La variation de la viscosité en fonction de la différence de température ( $T - T^*$ ) est représentée à la Figure 7.13 et comparée avec les différents modèles.

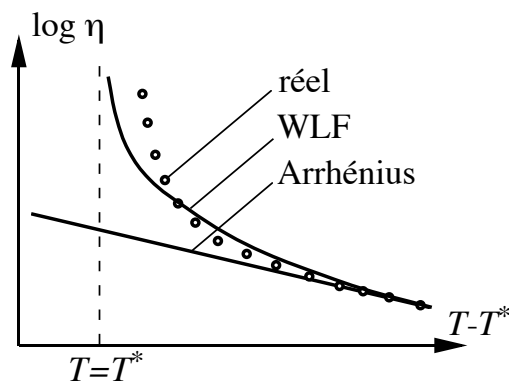


Figure 7.13. Représentation de la variation de la viscosité en fonction de la température et comparaison du comportement réel avec la loi d'Arrhenius et l'équation WLF.

## 7.4 RESUME DES PRINCIPAUX MODELES

### 7.4.1 Loi de puissance

$$\begin{aligned}\tau &= \kappa \dot{\gamma}^n \\ \eta &= \kappa \dot{\gamma}^{n-1} \quad \text{et} \quad \log \eta = \log \kappa + (n-1) \log \dot{\gamma}\end{aligned}\quad (7.22)$$

### 7.4.2 Modèle de *Carreau*

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[ 1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^2 \right]^{\frac{(n-1)}{2}} \quad (7.23)$$

### 7.4.3 Modèle de *Carreau-Yashuda*

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \left[ 1 + (\lambda_c \dot{\gamma})^k \right]^{\frac{(n-1)}{k}} \quad (7.24)$$

### 7.4.4 Modèle de *Cross*

$$\frac{\eta - \eta_\infty}{\eta_0 - \eta_\infty} = \frac{1}{1 + (K \dot{\gamma})^{1-n}} \quad (7.25)$$

### 7.4.5 Modèle de *Ellis*

$$\frac{\eta}{\eta_0} = (1 + (K \dot{\gamma}))^{2(a-1)} \quad \text{ou} \quad \frac{\eta}{\eta_0} = \frac{1}{1 + \left( \tau / \tau_{1/2} \right)^{a-1}} \quad (7.26)$$

### 7.4.6 Température : $\eta = \eta(T)$

$$\eta_0(T) = A e^{\frac{E_a}{RT}} \quad \Rightarrow \quad \ln \eta_0(T) = \ln A + \frac{E_a}{R} \frac{1}{T} \quad (7.27)$$

**7.4.7 Pression :  $\eta = \eta(P)$** 

$$\eta_0(P) = a \exp\{\chi P\} \quad (7.28)$$

où  $a$  est une constante et  $\chi$  est la compressibilité. En combinant la dépendance de la viscosité à la température et à la pression, on obtient :

$$\eta_0(T;P) = D \exp\left\{\frac{E}{RT} + \chi P\right\} \quad \text{où } D \text{ est une constante} \quad (7.29)$$

**7.4.8 Equation WLF**

$$\log \frac{\eta_0(T)}{\eta_0(T^*)} = \frac{-C_1(T - T^*)}{C_2 + (T - T^*)} \quad (7.30)$$

avec  $C_1 = 17.4$ ,  $C_2 = 51.6^\circ\text{C}$  et  $T^* = T_g$ .

En faisant les changements :  $T^* = T_g + 50^\circ\text{C}$ ,  $C_1 = 8.9$  et  $C_2 = 102^\circ\text{C}$ , on obtient :

$$\log \eta = 13 - \frac{8.9(T - (T_g + 50))}{102 + (T - (T_g + 50))} \quad (7.31)$$


---



## 8 ECOULEMENTS VISCOSIMETRIQUES

### 8.1 INTRODUCTION

#### 8.1.1 Ecoulements viscosimétriques types

L'écoulement viscosimétrique est dans la plupart des cas non-uniforme, mais il peut être considéré comme cisaillement simple à l'échelle d'un élément simple du liquide. Il permet d'obtenir les trois fonctions viscosimétriques  $\eta$ ,  $\psi_1$  et  $\psi_2$  introduites au Chapitre 1.

Nous considérons les deux écoulements viscosimétriques suivants, avec leurs *particularités* :

- l'écoulement de Poiseuille (provoqué par une chute de pression  $\Delta P$ ) :
  - 1) plan (entre deux plaques parallèles immobiles),
  - 2) dans un tube ;
- l'écoulement de cisaillement simple (dans ce cas il n'y a pas de chute de pression) :
  - 1) plan (entre deux plaques parallèle en translation),
  - 2) entre deux cylindres concentriques en rotation (appelé Couette),
  - 3) entre deux disques parallèles en rotation,
  - 4) entre un disque et un cône en rotation.

Remarquons que ces deux cas de base peuvent être combinés. Le paragraphe 8.2 se restreint au cas d'étude des fluides newtoniens uniquement, alors que dans le paragraphe 8.3 seront traités les écoulements des fluides non-newtoniens.

#### 8.1.2 Equations de conservation (fluides newtoniens)

Pour comprendre l'écoulement des liquides newtoniens, nous allons utiliser l'équation de conservation de la masse et les équations de Navier-Stokes et, qui proviennent de la mécanique des fluides (se référer au polycopié « milieux continus »).

### ***Conservation de la masse***

Lorsque le milieu est incompressible, l'équation de conservation de la masse prend la forme vectorielle réduite suivante :

$$\nabla \vec{u} = 0 \quad (8.1)$$

avec  $\nabla$  opérateur divergence et  $\vec{u}$  vecteur vitesse.

A noter que l'équation (8.1) est valable pour les écoulements incompressibles stationnaires et non stationnaires (si la vitesse dépend du temps).

### ***Conservation de la quantité de mouvement***

La deuxième équation, l'équation de Navier-Stokes (conservation de la quantité de mouvement), sous forme non-conservative en représentation Eulérienne est :

$$\rho \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \rho (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} - \eta \Delta \vec{u} = \rho \vec{f} - \text{grad } P \quad (8.2)$$

avec  $\vec{u}$  : vecteur vitesse,  $\rho$  : masse spécifique,  $\vec{f}$  : ensemble des forces volumiques (externes),  $P$  : pression et  $\Delta$  : Laplacien.

### ***Conservation de l'énergie***

On se place ici en conditions isothermes (température constante) et la conservation de l'énergie est alors implicite.



## 8.2 ECOULEMENTS VISCOSIMETRIQUES NEWTONIENS

### 8.2.1 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite rectangulaire

Une chute de pression provoque l'écoulement du fluide dans la direction  $Ox$  comme schématisé à la Figure 8.1. La vitesse de l'écoulement n'a pas de composante verticale. On considère par ailleurs le cas 2D (la largeur de la conduite  $B$  est infinie)

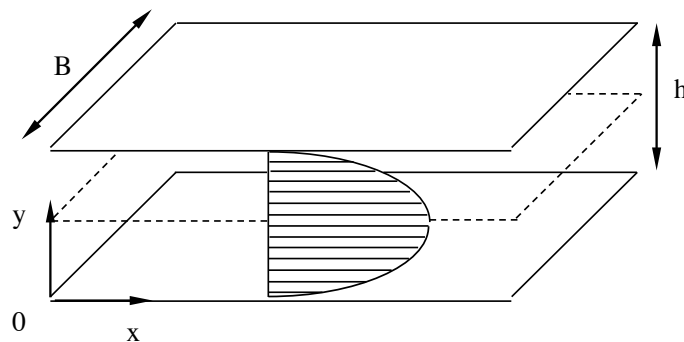


Figure 8.1. Profil de l'écoulement entre 2 plaques parallèles immobiles, avec  $h \ll B$ .

En considérant les hypothèses suivantes, on va démontrer la forme parabolique du profil de vitesses :

- Fluide newtonien, incompressible, (a)
- Ecoulement laminaire, (b)
- Vitesse nulle à la paroi, (c)
- Ecoulement stationnaire, (d)
- Pas de forces externes, (e)
- Pression constante dans la section, (f)
- Cas bidimensionnel. (g)

Les hypothèses (a) et (b) permettent l'utilisation des équations (8.1) et (8.2) et la (c) fournit les conditions aux limites lors de l'intégration. Toutes les autres hypothèses engendrent de nombreuses simplifications dans les équations (8.1) et (8.2).

On écrit l'équation de conservation de la masse :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \stackrel{(g)}{\Rightarrow} \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial u_x}{\partial x} = \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0 \quad (8.3)$$

et l'équation de Navier-Stokes (8.4) :

$$\text{Projection sur } x : \quad \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho f_x$$

$$\text{Projection sur } y : \quad \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho f_y$$

$$\text{Projection sur } z : \quad \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho f_z$$

L'hypothèse (d) annule les termes contenant une dérivée par rapport au temps, la (e) néglige le terme  $\rho f$  (forces extérieures), la (g) permet de supprimer tous les termes partiellement dérivés par rapport à  $z$ , la (b) annule les termes d'inertie, c'est à dire  $(\vec{u} \cdot \mathbf{grad}) \vec{u} = 0$ , finalement, la (f) permet de poser  $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0$  et  $\frac{\partial P}{\partial x} = cte$ . Notez bien que  $\frac{\partial P}{\partial x} \leq 0$  si l'écoulement est dans la direction de l'axe des  $x$ , car la pression est plus élevée à l'entrée du tube qu'à la sortie.

En appliquant toutes ces simplifications, on obtient alors (projection sur  $x$ ) :

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \quad (8.5)$$

Les deux autres équations issues des projections sur  $y$  et  $z$  se réduisant à  $0 = 0$ . En intégrant entre 0 et  $h$ , on obtient :

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes} \quad (8.6)$$

En utilisant les conditions aux limites (hyp. (c)), on détermine les constantes comme suit :

$$u_x(y=0) = 0 = C_2$$

$$\begin{aligned}
 u_x(y=h) = 0 &= \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) h^2 + C_1 h \Rightarrow \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) h^2 = -C_1 h \Rightarrow C_1 = -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) h \\
 \Rightarrow u_x(y) &= \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) y^2 - \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) hy \Rightarrow u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dx} \right) y(y-h)
 \end{aligned} \quad (8.7)$$

On trouve bien un profil d'écoulement parabolique, du type  $ay^2 + by$ .

### 8.2.2 Ecoulement en cisaillement simple entre plaques parallèles

La Figure 8.2 présente la géométrie d'un écoulement en cisaillement simple entre deux plaques parallèles dont l'une est en translation parallèlement à l'autre.

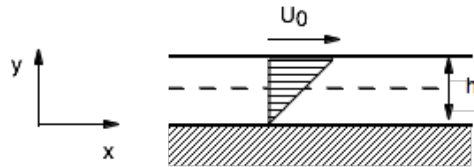


Figure 8.2. Ecoulement de cisaillement entre deux plaques parallèles, l'une des deux plaques ayant une vitesse  $U_0$ .

Pour déterminer le profil de vitesses au sein du fluide on procède de la même manière qu'au paragraphe précédent, en partant des équations (8.1) et (8.2), mais cette fois-ci, l'écoulement est généré par le mouvement de la plaque supérieure se déplaçant à la vitesse  $U_0$ , et non plus par une différence de pression. Les mêmes hypothèses de départ sont utilisées. On a alors  $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$  dans l'équation (8.5). Les conditions aux limites sont donc :

$$u_x(y=0) = 0 \quad \text{et} \quad u_x(y=h) = U_0 \quad (8.8)$$

On a alors :

$$\eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = 0 \quad (8.9)$$

que l'on intègre entre 0 et h :

$$\Rightarrow u_x(y) = C_1 y + C_2 \quad \text{où} \quad C_1, C_2 \text{ sont des constantes d'intégration, avec :}$$

$$u_x(y=0) = 0 \Rightarrow C_2 = 0$$

$$u_x(y=h) = U_0 \Rightarrow C_1 = \frac{U_0}{h} \quad (8.10)$$

Finalement :

$$u_x(y) = \frac{U_0}{h} y \quad (8.11)$$

Le profil des vitesses est linéaire !

### 8.2.3 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire

Comme montré à la Figure 8.3 le fluide s'écoule dans la direction  $x$  du cylindre sans turbulence.

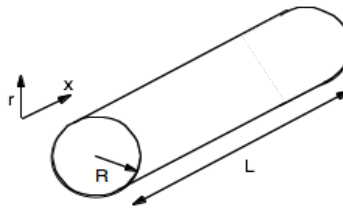


Figure 8.3. Ecoulement dans un cylindre,  $L \gg R$ .

Il y a une diminution de pression lorsque le fluide le traverse comme le montre la Figure 8.4.

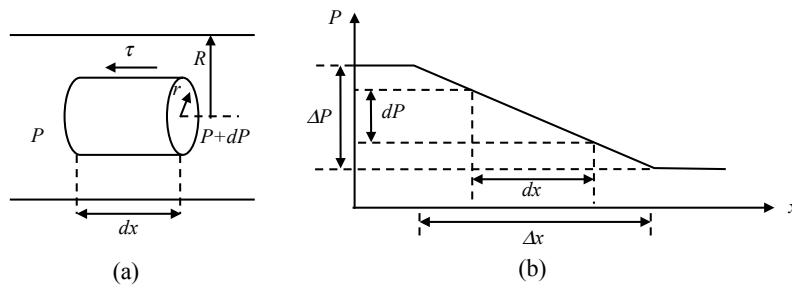


Figure 8.4. (a) Représentation schématique d'un écoulement dans un cylindre et (b) profil de pression le long du tube.

En coordonnées cylindriques l'équation de conservation de la masse s'écrit :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

et l'équation de Navier-Stokes devient :

$$\begin{aligned}
\text{Projection sur } r : \quad & \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_x \frac{\partial u_r}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial r} + \\
& \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial x^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right] + \rho f_r \\
\text{Projection sur } \theta : \quad & \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\theta u_r}{r} + u_x \frac{\partial u_\theta}{\partial x} \right) = - \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \\
& \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial x^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] + \rho f_\theta \\
\text{Projection sur } x : \quad & \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_x}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \\
& \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_x}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} \right] + \rho f_x
\end{aligned} \tag{8.12}$$

Pour simplifier ces équations, on peut poser les mêmes hypothèses qu'au paragraphe 8.2.1, mais appliquées à la symétrie cylindrique. C'est à dire :

- Fluide newtonien, incompressible, (a)
- Écoulement laminaire, (b)
- Vitesse nulle à la paroi, (c)
- Écoulement stationnaire, (d)
- Pas de forces externes, (e)
- Pression constante dans la section, (f)

Les hypothèses (a), (b), (c), (d), (e) permettent les mêmes simplifications qu'au paragraphe 8.2.1 : les détails ne sont donc pas fournis ici. L'hypothèse (f) indique que  $\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$ . De plus l'écoulement est simple dans la direction x, donc  $u_r = u_\theta = 0$ .

Finalement, on obtient :

$$r \frac{\partial^2 u_x}{\partial r^2} + \frac{\partial u_x}{\partial r} = \frac{r}{\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right) \tag{8.13}$$

Après intégration, on a :

$$u_x(r) = -\frac{\partial p}{\partial x} \frac{R^2}{4\eta} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (8.14)$$

A nouveau, on obtient un profil parabolique. Les résultats obtenus pourront être appliqués aux divers écoulements utilisés dans les rhéomètres.

### 8.2.4 Variables d'écoulement d'un fluide newtonien

#### *Cas de la conduite circulaire*

- Débit  $Q$

Le débit  $Q$  vaut par définition :

$$dQ = 2\pi u(r)rdr \Rightarrow Q = \int_0^R 2\pi u(r)rdr \quad (8.15)$$

en reprenant l'expression de la vitesse trouvée au paragraphe 8.2.3, soit (8.14) :

$$u_x(r) = -\frac{dP}{dx} \frac{R^2}{4\eta} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (8.16)$$

on a :

$$Q = -2\pi \frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} \int_0^R [R^2 - r^2] dr \Rightarrow Q = -2\pi \frac{dp}{dx} \frac{1}{4\eta} \left( \frac{R^4}{2} - \frac{R^4}{4} \right) \quad (8.17)$$

donc :

$$Q = \left( \frac{-dP/dx}{2\eta} \right) \left( \frac{\pi R^4}{4} \right) = -\frac{\Delta P}{L} \cdot \frac{\pi R^4}{8\eta} \quad (8.18)$$

où le terme chute de pression  $\frac{dp}{dx} < 0$ .

- Vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$

Par définition, on a :

$$\dot{\gamma} = \frac{du_x(r)}{dr} \quad \text{et} \quad \tau = \eta \dot{\gamma} = \eta \frac{du_x(r)}{dr} = -\frac{dP}{dx} \frac{R^2}{4} \left( -\frac{2r}{R^2} \right) = \frac{dP}{dx} \frac{r}{2} \quad (8.19)$$

On peut retrouver la même expression par un simple calcul d'équilibre des forces. A la Figure 8.4, en égalisant les forces à la distance  $r$  du centre du petit élément de volume, on trouve :

$$\tau_p \cdot 2\pi r \cdot dx = \pi r^2 \cdot dP \quad (8.20)$$

où le terme de gauche correspond aux forces de cisaillement et celui de droite aux forces de pression. D'où :

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{dP}{dx} \quad (8.21)$$

Le fluide étant newtonien, on a  $\dot{\gamma} = \frac{\tau}{\eta}$ . En utilisant judicieusement les équations (8.18) et (8.19) on écrit :

$$\dot{\gamma}_w = -\left( \frac{4Q}{\pi R^3} \right) = \dot{\gamma}_A \quad (8.22)$$

et aussi :

$$\eta_A = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_A} = \frac{-\frac{R}{2} \frac{dp}{dx}}{\frac{4Q}{\pi R^3}} \Rightarrow \eta_A = \frac{\left( -\frac{dp}{dx} \right) \pi R^4}{8Q} \quad (8.23)$$

où l'indice  $A$  signifie « apparent » ; c'est la valeur qui ressort lors des mesures (par rhéomètre, par exemple) et l'indice  $w$  signifie « à la paroi » ; c'est la valeur réelle, en un point particulier sur la paroi.

Notons que pour rester rigoureux, la vitesse de cisaillement devrait être négative. Cependant, par tradition, et pour simplifier, c'est souvent une valeur positive que l'on donne, en considérant seulement la valeur absolue de cette vitesse.

Dans un fluide newtonien, les valeurs de la vitesse de cisaillement apparente sont égales aux valeurs de la vitesse de cisaillement à la paroi. Ce n'est pas le cas pour les fluides non-newtoniens.

A partir de l'équation (8.5), on obtient une autre expression de la vitesse :

$$u_x(r) = \frac{2Q}{\pi R^2} \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 \right] \quad (8.24)$$

### ***Cas de la conduite rectangulaire***

La conduite et l'écoulement sont définis à la Figure 8.5. Il est à noter que par rapport au paragraphe 8.2.1, le repère ne possède plus la même origine !

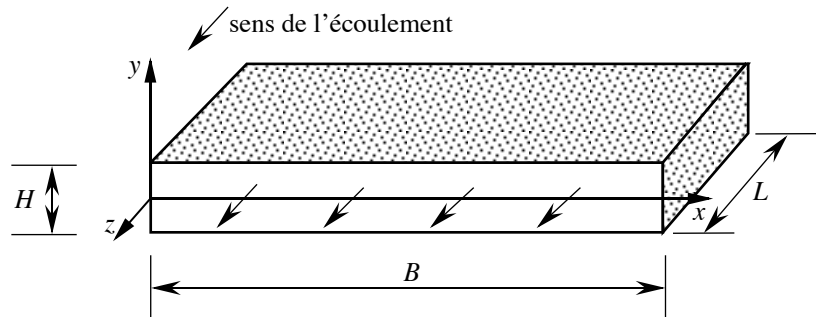


Figure 8.5. Représentation schématique de l'écoulement dans une conduite rectangulaire.

Dans ce cas-là, on trouve la vitesse de l'écoulement en repartant de l'équation (8.5) du paragraphe 8.2.1 :

$$u_z(y) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dz} \right) y^2 + C_1 y + C_2 \quad \text{où } C_1 \text{ et } C_2 \text{ sont des constantes} \quad (8.25)$$

Les constantes  $C_1$  et  $C_2$  s'obtiennent en posant les conditions aux limites :



$$u \left( y = \frac{H}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dz} \right) \frac{H^2}{4} + C_1 \frac{H}{2} + C_2 = 0 \quad (8.25a)$$

$$u \left( y = -\frac{H}{2} \right) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dz} \right) \frac{H^2}{4} - C_1 \frac{H}{2} + C_2 = 0 \quad (8.25b)$$

La différence de ces 2 équations donne  $C_1 = 0$  et leur somme donne  $C_2 = -\frac{1}{2\eta} \left( \frac{dp}{dz} \right) \frac{H^2}{4}$ .

Finalement on trouve :

$$u_z(y) = -\frac{\Delta p}{2\eta L} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^2 - y^2 \right] \quad (8.26)$$

- *Débit*

Le débit est donné par l'expression :

$$dQ = u(y) \cdot dS = u(y) \cdot B \cdot dy \quad \Rightarrow \quad Q = \int_{-\frac{H}{2}}^{+\frac{H}{2}} u(y) \cdot B \cdot dy \quad (8.27)$$

d'où

$$Q = -B \frac{\Delta p}{2\eta L} \left[ \frac{H^3}{4} - \frac{1}{3} \left( \frac{2H^3}{8} \right) \right] \quad \Rightarrow \quad Q = -\frac{BH^3 \Delta p}{12 \eta L} \quad (8.28)$$

### 8.3 FLUIDES NON NEWTONIENS

L'équation de Navier-Stokes n'est plus utilisable dans le cas des fluides non-newtoniens, car l'hypothèse du fluide newtonien (viscosité indépendante de la vitesse de cisaillement) n'est plus vérifiée. On pourrait encore résoudre les équations de base de l'écoulement en introduisant une loi adéquate, comme la loi de puissance, mais on doit vite recourir à des méthodes numériques. On utilise alors une approche différente, soit l'équilibre des forces.

#### 8.3.1 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite circulaire

De l'équilibre des forces sur un élément de volume dans une conduite circulaire (Figure 8.4, paragraphe 8.2.3), on avait trouvé la relation (8.21), indépendante de la viscosité et donc aussi applicable à un fluide non-newtonien, soit :

$$\tau = \frac{r}{2} \frac{dP}{dx} \quad (8.29)$$

La vitesse  $u$  se détermine de la manière suivante (voir les paragraphes 1.4.1 et 1.4.2) :

$$\dot{\gamma} = \frac{du}{dr} \quad u(R) = 0 \quad u(r) = \int_0^r \frac{u(r)}{r} du = \int_R^r \dot{\gamma} dr \quad (8.30)$$

Alors en caractérisant le comportement du fluide non-newtonien par sa loi de puissance :

$$\tau = \kappa \dot{\gamma}^n \Rightarrow \dot{\gamma} = \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (8.31)$$

On remplace  $\tau$  par sa valeur dans l'équation bilan :

$$u = \int_R^r \left( \frac{\tau}{\kappa} \right)^{\frac{1}{n}} dr = \int_R^r \left( \frac{r}{2\kappa} \frac{dp}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} dr = \left( \frac{dp}{dx} \right)^{\frac{1}{n}} \int_R^r r^{\frac{1}{n}} dr \quad (8.32)$$

Le calcul donne :

$$u(r) = \frac{\left[ \frac{dp}{dx} \right]^{\frac{1}{n}}}{\left( \frac{1}{n} + 1 \right)} \left[ R^{\left( \frac{1}{n} + 1 \right)} - r^{\left( \frac{1}{n} + 1 \right)} \right] \quad (8.33)$$

### 8.3.2 Ecoulement de Poiseuille dans une conduite rectangulaire

En appliquant l'équilibre des forces sur un élément de volume rectangulaire de la Figure 8.5, on aboutit au résultat (de la même manière qu'au paragraphe 8.2.4 pour le tube cylindrique) :

$$u_z(y) = \left( \frac{-\Delta p}{\kappa L} \right)^{\frac{1}{n}} \frac{n}{n+1} \left[ \left( \frac{H}{2} \right)^{\frac{n+1}{n}} - y^{\frac{n+1}{n}} \right] \quad (8.34)$$

### 8.3.3 Variables d'écoulement d'un fluide non-newtonien

#### *Cas de la conduite circulaire*

##### - Débit $Q$

A partir de la vitesse d'écoulement trouvée au paragraphe 8.3.2 (équation 8.7), il est possible de calculer le débit du fluide  $Q$  comme définit précédemment par l'équation 8.15. On aboutit au résultat suivant :

$$Q = \left( \frac{-dp/dx}{2\kappa} \right)^{1/n} \left( \frac{\pi}{\left( \frac{1}{n} \right) + 3} \right) R^{(1/n + 3)} \quad (8.35)$$

##### - Vitesse de cisaillement $\dot{\gamma}$

La vitesse de cisaillement à la paroi est déterminable et vaut :

$$\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}(R) = \left. \frac{du_x(r)}{dr} \right|_{r=R} = \left( \frac{3n+1}{4n} \right) \left( \frac{4Q}{\pi R^3} \right) = \left( \frac{3n+1}{4n} \right) \dot{\gamma}_A \quad (8.36)$$

On définit la vitesse de cisaillement apparente  $\dot{\gamma}_A$  comme valant :

$$\dot{\gamma}_A = \left( \frac{4Q}{\pi R^3} \right) \quad (8.37)$$

Dans un fluide non newtonien, les valeurs de la vitesse de cisaillement apparente ne sont pas égales aux valeurs de la vitesse de cisaillement à la paroi. Pour obtenir  $\dot{\gamma}_w$ , il faut corriger les valeurs de  $\dot{\gamma}_A$  en utilisant la relation (8.37).

On obtient finalement la viscosité apparente  $\eta_a$ :

$$\eta_a = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_A} = \frac{(-dP/dx)\pi R^4}{8Q} \quad (8.38)$$

### ***Cas de la conduite rectangulaire***

#### **- Débit $Q$**

En reprenant la valeur de la vitesse de l'écoulement dans ce cas (§ 8.3.1), on trouve comme expression pour le débit :

$$Q = \frac{nBH^2}{2(2n+1)} \left( -\frac{H\Delta P}{2\kappa L} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (8.39)$$

### **8.3.4 Profils de vitesse d'écoulement**

Le gradient de vitesse d'écoulement, i.e. la fonction de distribution de vitesse dans le fluide, dépend du fluide qui s'écoule. Les profils de vitesse de fluides décrits par la loi puissance sont dessinés à la Figure 8.6. On remarque que le profil de vitesse d'un fluide dilatant est différent de celui d'un fluide newtonien, car le gradient dépend de la valeur de l'indice  $n$  de la loi de puissance. On rappelle qu'un fluide dilatant prend des valeurs de  $n$  supérieures à 1, et qu'un fluide pseudo plastique des valeurs inférieures à 1.

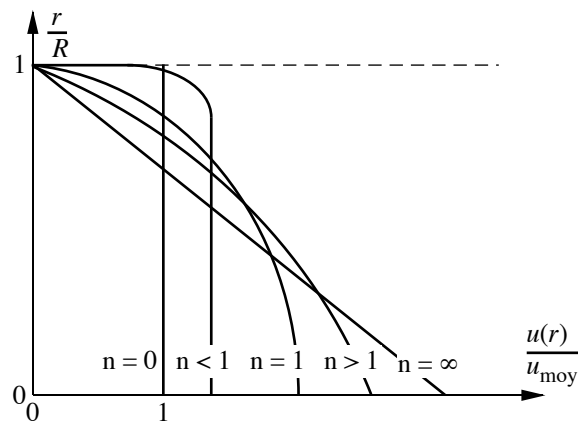


Figure 8.6. Profils de vitesse d'écoulement en fonction de la valeur de l'indice  $n$  de la loi de puissance.

## 8.4 ANALYSE DIMENSIONNELLE

« *Ne jamais faire de calculs avant d'en connaître le résultat.* » (J.A. Wheeler)

### 8.4.1 Principe fondamental

L'analyse dimensionnelle est une méthode bien connue pour réduire le nombre et la complexité de variables expérimentales influençant un phénomène physique donné. Cette approche remonte aux travaux d'Euler sur les unités et les dimensions en physique dans la deuxième moitié du 18<sup>ème</sup> siècle. Elle repose sur le principe fondamental selon lequel toute relation entre des grandeurs physiques est *dimensionnellement homogène*.

Si un phénomène dépend de  $n$  variables dimensionnelles, l'analyse dimensionnelle permet de réduire le problème à seulement  $k$  variables sans dimension. La différence  $n - k$  est en générale égale au nombre de dimensions fondamentales qui gouvernent le problème étudié. Les quatre dimensions fondamentales utilisées dans le cadre de la mécanique des fluides sont la masse  $M$ , la longueur  $L$ , le temps  $T$  et la température  $\Theta$ , ce qu'on désigne par le système  $\{MLT\Theta\}$  (ou  $\{FLT\Theta\}$ , la force  $F$  remplaçant la masse  $M$ ).

La résolution des équations de conservation (voir le paragraphe 8.1.2) peut s'avérer trop difficile dans le cas de géométries et de conditions d'écoulement complexes, et il faut alors recourir à des expériences. Toutefois ces dernières peuvent rapidement devenir fastidieuses et extrêmement coûteuses ... L'analyse dimensionnelle offre une alternative très efficace à ces problèmes. Cette méthode est par exemple à l'origine du développement de maquettes, par exemple testées en bassin de carène ou en soufflerie, ce qui revient considérablement moins cher que de tester des prototypes de taille réelle, à l'échelle 1.

Supposons qu'on s'intéresse à la force (de traînée) d'un objet dans un fluide, comme une automobile dans l'air. On considère que cette force  $F$  dépend de la taille de l'objet  $L$ , de sa vitesse  $V$ , de la densité du fluide  $\rho$  et de sa viscosité  $\eta$ , ce qui fait cinq variables au total :

$$F = f(L, V, \rho, \eta) \quad (8.40)$$

Trouver la fonction  $f$  expérimentalement consisterait à faire varier chacun des 4 paramètres en gardant les autres constants. En choisissant 10 valeurs pour chacun des paramètres, on arrive au nombre énorme de  $10^4 = 10'000$  expériences ! L'analyse dimensionnelle arrive à la rescousse, en réduisant l'équation (8.40) à une forme équivalente, fonction de deux variables seulement et non plus de cinq comme nous le verrons dans la suite, nécessitant par conséquent 10 expériences et non plus 10'000.

#### 8.4.2 Théorème de Vaschy-Buckingham pi

En 1914 Buckingham propose la méthode d'analyse dimensionnelle, déjà formalisée par Vaschy en 1892 et utilisée de nos jours sous l'appellation du théorème de Vaschy-Buckingham-pi. Le terme pi correspond à la notation mathématique du produit de variables  $\Pi$ . Le théorème s'exprime comme suit :

*Soit une loi physique entre  $n$  variables avec  $j$  dimensions indépendantes, alors on peut exprimer cette loi sous la forme d'une relation entre  $k = n - j$  nombres sans dimension :*

$$a_i = f(a_2, a_3 \dots a_n) = 0 \quad \Rightarrow \quad \Pi_i = g(\Pi_2, \Pi_3 \dots \Pi_k) = 0 \quad (8.41)$$

Le théorème permet de trouver des nombres adimensionnels sous la forme de produits dénommés  $\Pi_1, \Pi_2 \dots \Pi_k$ . L'application de ce théorème se fait en cinq étapes :

1. Etablir la liste des  $n$  variables du problème. L'oubli d'une variable importante conduira à l'échec de l'analyse.
2. Etablir la liste des dimensions de chacune des variables selon le système  $\{MLT\Theta\}$  (ou  $\{FLT\Theta\}$ ) et établir le nombre de dimensions du problème, à savoir la valeur de  $j$ . Voir le Tableau 8.1 avec les dimensions de propriétés pertinentes pour des problèmes de mécanique des fluides.
3. Sélectionner  $j$  variables ne formant pas un 'groupe  $\Pi$ ', i.e., des produits de variables possédant au moins une dimension différente. En général on choisit la taille, la vitesse, la densité, et ajouter une variable aux  $j$  variables sélectionnées, par exemple la variable dépendante de l'équation qu'on cherche à analyser ( $F$  dans l'équation 8.40).

4. Former le produit de puissances des variables puis trouver les valeurs des exposants rendant le produit adimensionnel, et réitérer  $j-1$  fois les étapes 3 et 4 avec l'ajout d'autres variables.
5. Ecrire la fonction de variables adimensionnelles et vérifier que chaque groupe  $\Pi$  est bien adimensionnel.

Tableau 8.1. Dimensions de propriétés pertinentes pour des problèmes de mécanique des fluides [F. White, Fluid Mechanics].

Quantity	Symbol	Dimensions	
		$MLT\Theta$	$FLT\Theta$
Length	$L$	$L$	$L$
Area	$A$	$L^2$	$L^2$
Volume	$\mathcal{V}$	$L^3$	$L^3$
Velocity	$V$	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$
Acceleration	$dV/dt$	$LT^{-2}$	$LT^{-2}$
Speed of sound	$a$	$LT^{-1}$	$LT^{-1}$
Volume flow	$\mathcal{Q}$	$L^3T^{-1}$	$L^3T^{-1}$
Mass flow	$\dot{m}$	$MT^{-1}$	$FTL^{-1}$
Pressure, stress	$p, \sigma$	$ML^{-1}T^{-2}$	$FL^{-2}$
Strain rate	$\dot{\epsilon}$	$T^{-1}$	$T^{-1}$
Angle	$\theta$	None	None
Angular velocity	$\omega$	$T^{-1}$	$T^{-1}$
Viscosity	$\mu$	$ML^{-1}T^{-1}$	$FTL^{-2}$
Kinematic viscosity	$\nu$	$L^2T^{-1}$	$L^2T^{-1}$
Surface tension	$Y$	$MT^{-2}$	$FL^{-1}$
Force	$F$	$MLT^{-2}$	$F$
Moment, torque	$M$	$ML^2T^{-2}$	$FL$
Power	$P$	$ML^2T^{-3}$	$FLT^{-1}$
Work, energy	$W, E$	$ML^2T^{-2}$	$FL$
Density	$\rho$	$ML^{-3}$	$FT^2L^{-4}$
Temperature	$T$	$\Theta$	$\Theta$
Specific heat	$c_p, c_v$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$	$L^2T^{-2}\Theta^{-1}$
Specific weight	$\gamma$	$ML^{-2}T^{-2}$	$FL^{-3}$
Thermal conductivity	$k$	$MLT^{-3}\Theta^{-1}$	$FT^{-1}\Theta^{-1}$
Expansion coefficient	$\beta$	$\Theta^{-1}$	$\Theta^{-1}$

### 8.4.3 Analyse dimensionnelle de la force de traînée

Prenons l'exemple donné par l'équation (8.40). Il y a  $n = 5$  variables. Les dimensions de chacune de ces variables sont :

- $F : \{MLT^{-2}\}$
- $L : \{L\}$
- $V : \{LT^{-1}\}$
- $\rho : \{ML^{-3}\}$
- $\eta : \{ML^{-1}T^{-1}\}$

Seules  $j = 3$  dimensions sont présentes. Ainsi, on s'attend à ce que  $k = 5 - 3 = 2$ , c'est à dire qu'on cherche deux  $\Pi$ , soit  $\Pi_1$  et  $\Pi_2$ . Il faut alors sélectionner  $j$  variables ne formant pas un 'groupe  $\Pi$ '. En inspectant la liste on constate que  $L$ ,  $V$  et  $\rho$  ne peuvent pas former un groupe  $\Pi$  parce que seul  $\rho$  contient la dimension  $M$  et que seul  $V$  contient la dimension  $T$ .

Pour trouver les deux  $\Pi$ , on sélectionne ces trois variables  $L$ ,  $V$  et  $\rho$ , que l'on combine avec une quatrième, soit  $F$ , soit  $\eta$ . Pour  $\Pi_1$  on choisit la variable dépendante qui est la force  $F$ , et on écrit :

$$\Pi_1 = L^a V^b \rho^c F^d = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (MLT^{-2})^d = M^0 L^0 T^0 \quad (8.42)$$

où le terme  $M^0 L^0 T^0$  traduit la condition d'adimensionnalité des  $\Pi$ . La force  $F$  étant la variable dépendante on pose  $d = 1$ , et il reste trois équations pour trois inconnues  $a$ ,  $b$  et  $c$ , que l'on résout pour chaque dimension :

- Longueur  $L$  :  $a + b - 3c + 1 = 0$
- Masse  $M$  :  $c + 1 = 0$
- Temps  $T$  :  $-b - 2 = 0$

On trouve  $a = -2$ ,  $b = -2$  et  $c = -1$ , et donc :

$$\Pi_1 = L^{-2} V^{-2} \rho^{-1} F = \frac{F}{\rho V^2 L^2} = C_F \quad (8.43)$$

$C_F$  est le coefficient de force adimensionnel.

Pour trouver  $\Pi_2$  on ajoute la viscosité  $\eta$  aux trois variables  $L$ ,  $V$  et  $\rho$  :

$$\Pi_2 = L^a V^b \rho^c \eta^d = (L)^a (LT^{-1})^b (ML^{-3})^c (ML^{-1}T^{-1})^d = M^0 L^0 T^0 \quad (8.44)$$

On peut prendre n'importe quelle valeur pour l'exposant  $d$  mais la valeur 1 conduit à un résultat bien connu. On a :



- Longueur  $L$  :  $a + b - 3c - 1 = 0$
- Masse  $M$  :  $c + 1 = 0$
- Temps  $T$  :  $-b - 1 = 0$

On trouve  $a = b = c = -1$ , et donc :

$$\Pi_2 = L^{-1}V^{-1}\rho^{-1}\eta^1 = \frac{\eta}{\rho VL} = \text{Re}^{-1} \quad (8.45)$$

qui est en effet l'inverse du nombre de Reynolds.

On a en définitive la relation entre deux variables, équivalente à la relation (8.40) qui elle était entre cinq variables :

$$C_F = g(\text{Re}^{-1}) \quad (8.46)$$

La fonction  $g$  est différente de la fonction  $f$  mais elle contient la même information : rien n'est perdu dans l'analyse dimensionnelle.

Cette relation correspond en fait à la loi de Stokes :

$$C_F = \frac{6\pi}{\text{Re}} \quad \text{soit} \quad F = 6\pi\eta VL \quad (8.47)$$

L'analyse dimensionnelle ne permet pas à elle seule de trouver le terme  $6\pi$ . Il reste toujours une constante sans dimension dont on ne connaît pas la valeur numérique et un calcul plus complet est nécessaire.

---



## 9 MESURES RHEOMETRIQUES

Les rhéomètres permettent de mesurer la viscosité et les propriétés viscoélastiques comme les modules élastique et de perte en cisaillement par exemple d'un polymère. Il en existe diverses sortes, chacun possédant des avantages et des inconvénients.

### 9.1 RHEOMETRE CAPILLAIRE

Le rhéomètre capillaire utilise un écoulement, forcé par un piston, traversant une filière cylindrique de très petit diamètre. On contrôle en règle générale la vitesse du piston, et dans certains cas on contrôle plutôt la force. Force ou pression et vitesse du piston sont mesurables. L'appareil est schématisé à la Figure 9.1.

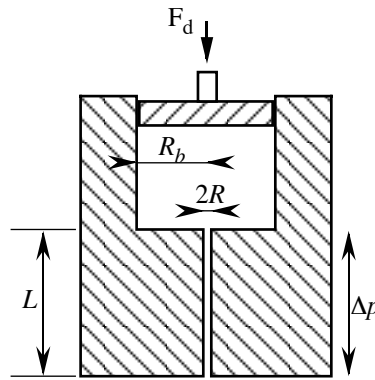


Figure 9.1. Schéma d'un rhéomètre capillaire avec  $R \ll R_b$ .

#### 9.1.1 Détermination de la viscosité

La pression  $P_d$  exercée sur le fluide par le piston est :

$$P_d = \frac{F_d}{\pi R_b^2} \quad (9.1)$$

La contrainte à la paroi s'obtient par l'équilibre des forces et vaut :

$$\tau_w = \frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta P}{L} = \frac{P_d}{2(L/R)} \quad (9.2)$$

Pour un fluide newtonien, la vitesse de cisaillement se détermine par :

$$\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_A = \frac{4Q}{\pi R^3} \quad (9.3)$$

d'où la viscosité, obtenue en mesurant le débit  $Q$  sous une pression  $P_d$  (on retrouve bien l'équation 8.23) :

$$\eta = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} = \frac{\Delta P}{2(L/R)} \cdot \frac{\pi R^3}{4Q} = \frac{\pi R^4}{8L} \cdot \frac{P_d}{Q} \quad (9.4)$$

En fait l'équation (9.2) pose un problème de convergence, ce que résout la correction de Bagley.

### 9.1.2 Correction de Bagley

Lors d'un écoulement dans un tube où il y a changement brusque de diamètre (Figure 9.2a), la pression totale générée par la géométrie est la somme de la pression créée par le capillaire lui-même et de la pression créée par la zone convergente précédant le capillaire :

$$P = P_d + \Delta P_{convergence} \quad (9.5)$$

La correction de Bagley consiste à calculer une longueur de capillaire fictive à ajouter à celle du capillaire réel et qui donnera une perte de pression égale à la pression de convergence. On introduit un terme fictif qui va corriger la contrainte de cisaillement à la paroi. Le terme fictif correspond soit à une longueur, soit à une pression.

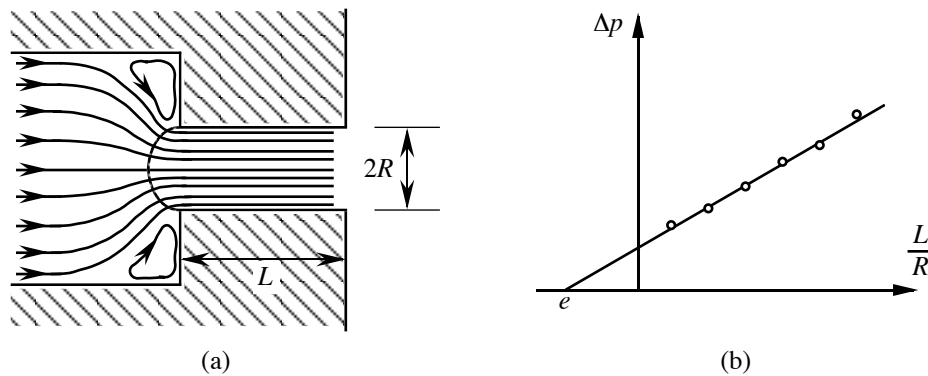


Figure 9.2. Correction de Bagley. (a) schéma d'un tube où il y a un changement brusque de diamètre. (b) graphique du rapport des longueurs du capillaire en fonction de la perte de pression.

Il suffit alors de construire le diagramme différence de pression-longueur relative à partir de résultats expérimentaux, comme à la Figure 9.2b. La valeur de  $e$  est la distance entre le point d'intersection de la droite expérimentale et l'origine. On obtient la contrainte de cisaillement à la paroi par la relation :

$$\tau_w = \frac{\Delta p}{2(L/R + |e|)} \quad \text{où } |e| \text{ représente le facteur de correction} \quad (9.6)$$

Par conséquent la viscosité devient :

$$\eta = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} = \frac{\pi R^4}{8L} \left( \frac{L}{L + R \cdot |e|} \right) \cdot \frac{P_d}{Q} = \left( \frac{L}{L + R \cdot |e|} \right) \cdot \eta^{\text{non corrigé}} \quad (9.7)$$

### 9.1.3 Correction de Rabinowitsch

Pour un fluide non-newtonien la relation contrainte à la paroi-taux de cisaillement n'est plus linéaire car la viscosité dépend du taux de cisaillement et une correction s'avère nécessaire. Rabinowitsch a développé une approche en 1929 pour traiter le cas de fluides décrits par la loi puissance et obtenir la viscosité, comme décrit dans le paragraphe suivant.

Lors de mesures capillaires, on détermine la viscosité du fluide en mesurant la différence de pression pour trouver directement le débit qui, dans le cas d'un fluide newtonien est donné par :

$$Q = \frac{\pi R^4}{8\eta} \frac{\Delta P}{L} \quad (9.8)$$

On détermine ensuite par les équations de la mécanique des fluides le taux de cisaillement apparent et la contrainte de cisaillement à la paroi :

$$\dot{\gamma}_A = \frac{4Q}{\pi R^3} \quad \text{et} \quad \tau_w = \frac{R}{2} \cdot \frac{\Delta P}{L} \quad (9.9)$$

Pour un fluide newtonien, la viscosité est alors déterminée par la relation linéaire :

$$\tau = \eta \dot{\gamma}_w \quad \text{où} \quad \dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_A \quad (9.10)$$

Pour les fluides non-newtoniens, le problème est plus compliqué, car la relation contrainte à la paroi-taux de cisaillement n'est plus linéaire (la viscosité dépend du taux de cisaillement). Pour pallier ce problème, on utilise la procédure de Rabinowitsch, qui permet de corriger le taux de cisaillement apparent. La correction se fait en traçant une droite avec quelques valeurs de la contrainte à la paroi et du cisaillement apparent comme effectué à la Figure 9.3.

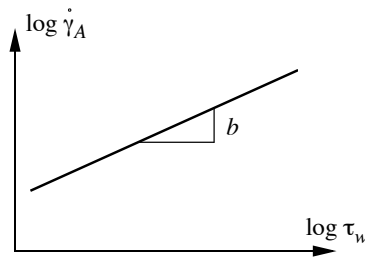


Figure 9.3. Représentation, en logarithme, du taux de cisaillement en fonction de la contrainte à la paroi.

La pente logarithmique de cette droite fournit un coefficient  $b$  de la relation empirique :

$$b \equiv \frac{d \text{Log} \dot{\gamma}_A}{d \text{Log} \tau_w} = \frac{d \text{Ln} \dot{\gamma}_A}{d \text{Ln} \tau_w} \quad (9.11)$$

En intégrant par parties l'équation de débit 8.35 et en posant  $dr = (R/\tau_w)d\tau$  (à la paroi), puis en dérivant l'expression obtenue pour le débit selon  $\tau_w$ , on trouve l'équation de Rabinowitsch :

$$\dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_A \left( \frac{3+b}{4} \right) \quad (9.12)$$

La loi de la puissance donne :

$$b = \frac{1}{n} \Rightarrow \dot{\gamma}_w = \dot{\gamma}_A \left( \frac{3n+1}{4n} \right) \quad (9.13)$$

La viscosité réelle est :

$$\eta = \frac{\tau_w}{\dot{\gamma}_w} \quad (9.14)$$

Les différentes étapes du calcul de la viscosité sont résumées à la Figure 9.3.

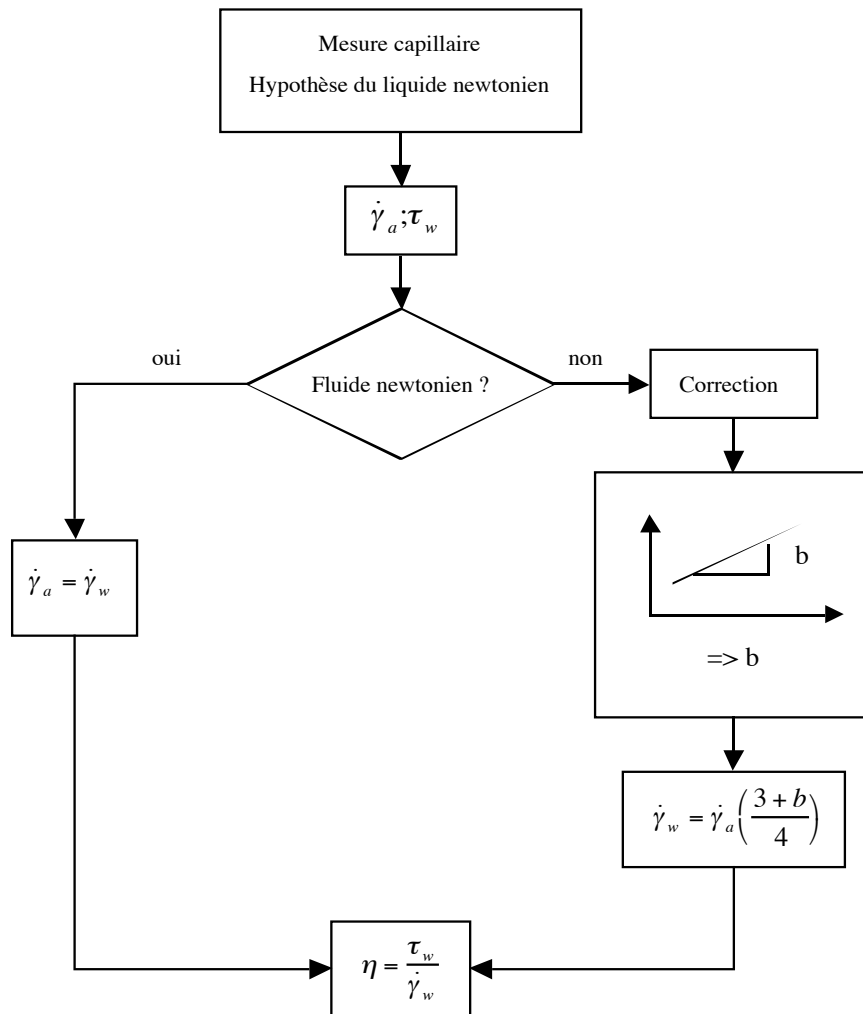


Figure 9.4. Calcul de la viscosité dans le cas de fluides newtonien et non-newtonien.

#### 9.1.4 Avantages et inconvénients du rhéomètre capillaire

- *Avantages* : conditions représentatives des conditions réelles de procédés de mise en œuvre, mesure des viscosités en cisaillement et élongationnelle.
- *Désavantages* : formation de 'vortex' de fluide au niveau de la contraction de diamètre (voir Figure 9.4a et Chapitre 15) et nécessité d'établir des corrections, éventuels problèmes de glissement du fluide sur la paroi du capillaire, et consommation de matière assez importante.

## 9.2 RHEOMETRE DE COUETTE

Un écoulement de Couette est défini comme un écoulement d'un fluide cisailé entre deux cylindres coaxiaux, comme le montre la Figure 9.5. On utilise ce type d'écoulement pour mesurer la viscosité.

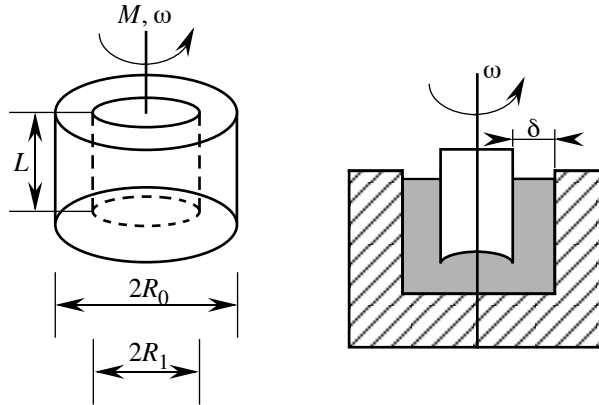


Figure 9.5. Schéma d'un rhéomètre de Couette.

### 9.2.1 Détermination de la viscosité

En équilibrant les moments le long des faces latérales, on trouve que :

$$\tau(r) = \frac{M}{2\pi r^2 L} \quad \text{avec} \quad M = \text{couple} \quad (9.15)$$

En supposant que l'espace  $\delta = R_0 - R_1$  entre les deux cylindres est très petit, c'est-à-dire  $R_1 \approx R_0 = R$ , on écrit avec la condition  $\delta \ll R$  :

$$\dot{\gamma} \cong -\frac{du_\theta}{dr} = \frac{\omega R}{\delta} \quad (9.16)$$

où  $\omega$  est la vitesse de rotation du cylindre central. La viscosité s'obtient alors :

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{M \delta}{2\pi R^3 L \omega} \quad (9.17)$$



Dans la géométrie concentrique traitée ici, on a le taux de cisaillement à la surface du cylindre interne (rayon  $R_1$ ) tournant :

$$\dot{\gamma}_1 = 2\omega \frac{(R_0/R_1)^2}{(R_0/R_1)^2 - 1} \quad (9.18)$$

Notons par ailleurs que lorsque  $\delta$  devient trop important, l'équation 9.16 n'est plus valable et on doit poser :

$$\dot{\gamma} = r \cdot \frac{d\omega}{dr} = r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) \quad (9.19)$$

### 9.2.2 Cas de fluides non-newtoniens

Dans le cas d'un fluide de type loi de puissance, l'équation (9.15) donnant la contrainte reste valable, par contre le taux de cisaillement à la paroi du cylindre interne en rotation prend la forme :

$$\dot{\gamma}_1 = \frac{2\omega}{n} \frac{(R_0/R_1)^{2/n}}{(R_0/R_1)^{2/n} - 1} \quad (9.20)$$

### 9.2.3 Avantages et inconvénients du rhéomètre de Couette

- *Avantage* :  $\dot{\gamma}$  est constant si  $\delta \ll R$ ,  $\dot{\gamma}$  peut être grand, et  $\eta$  peut être petit.
- *Désavantage* : source d'erreur avec le film horizontal.

### 9.3 RHEOMETRE CONE - PLAQUE

Un écoulement entre un cône et une plaque dont l'un est en rotation permet, moyennant quelques hypothèses, de déterminer la viscosité. On construit des rhéomètres utilisant cet écoulement comme schématisé à la Figure 9.6, l'avantage principal étant d'obtenir un taux de cisaillement constant dans le fluide.

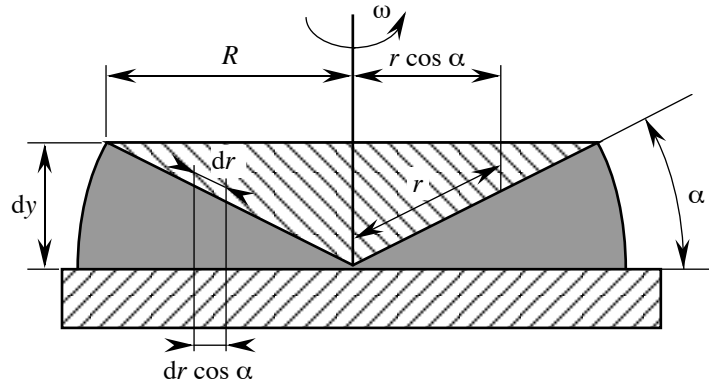


Figure 9.6. Schéma d'un rhéomètre cône – plaque ou cône – plan.

#### 9.3.1 Détermination de la viscosité

Les hypothèses pour déterminer la viscosité sont :

- $\alpha$  est petit ( $< 1^\circ$ ),
- pas d'effet d'inertie,
- $\tau, \dot{\gamma}$  constants selon  $r$ .

Les lignes de fluide forment des cônes coaxiaux (ce qui explique que  $\dot{\gamma}$  est constant) et on trouve que :

$$\dot{\gamma} = \frac{u_\theta(r)}{\delta(r)} = \frac{\omega r \cos \alpha}{r \alpha} \approx \frac{\omega}{\alpha} \quad \text{car} \quad \cos \alpha \approx 1 \quad (9.21)$$

La cisssion  $\tau(r)$  est constante, car  $\tau$  est une fonction de  $\dot{\gamma}$  qui est constant et donc :

$$\tau (2\pi r \cdot \cos \alpha \, dr) r \cos \alpha = dM \quad (9.22)$$

En intégrant, on a :

$$M = 2\pi\tau \cos^2 \alpha \int_0^{R/\cos \alpha} r^2 dr = \frac{2\pi\tau R^3}{3\cos \alpha} \approx \frac{2\pi\tau R^3}{3} \quad (9.23)$$

La viscosité est finalement :

$$\eta = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{3\alpha}{2\pi R^3} \frac{M}{\omega} \quad (9.24)$$

### 9.3.2 Avantages et inconvénients du rhéomètre cône – plaque

- *Avantages* : pas besoin de grande quantité de fluide, la vitesse de cisaillement est uniforme dans le fluide, préparation et nettoyage de l'appareil facile.
- *Désavantages* : source d'erreur provenant des bords (extérieur de l'appareil) et du cône, mal adapté pour mesurer des fluides peu visqueux.

## 9.4 RHEOMETRE A PLAQUES PARALLELES

L'écoulement entre deux plaques parallèles dont l'une est en rotation, permet aussi de déterminer la viscosité d'un fluide. La géométrie est plus simple que la géométrie cône – plan. Le fonctionnement du rhéomètre utilisant cet écoulement est décrit à la Figure 9.7.

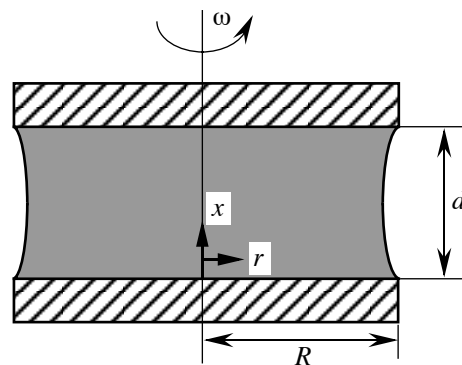


Figure 9.7. Schéma d'un rhéomètre à plaques parallèles.

### 9.4.1 Détermination de la viscosité

La vitesse de cisaillement  $\dot{\gamma}$  est nulle à  $r = 0$  et maximale à  $r = R$  et n'est donc pas constante contrairement à la géométrie cône – plan. La rotation d'une plaque donne la relation :

$$\dot{\gamma} = \frac{\omega r}{d} \quad (9.25)$$

L'équilibre des moments fait que :

$$\tau(r) 2\pi r dr = dM \quad (9.26)$$

En intégrant, on trouve :

$$M = 2\pi \int_0^R r^2 \tau(r) dr = \frac{2\pi R^3}{3} \tau_R \quad (9.27)$$

d'où la viscosité :

$$\eta = \frac{\tau_R}{\dot{\gamma}_R} = \frac{3M d}{2\pi \omega R^4} \quad (9.28)$$

Dans le cas d'un fluide non-newtonien de type loi de puissance, on a :

$$M = 2\pi \int_0^R r^2 \kappa \left( \frac{\omega r}{d} \right)^n dr = 2\pi \left( \frac{\omega}{d} \right)^n \int_0^R r^{2+n} dr = \frac{2\pi R^{3+n}}{3+n} \kappa \left( \frac{\omega}{d} \right)^n \quad (9.29)$$

Et si la loi d'écoulement n'est pas connue, on a la relation :

$$\tau_R = \frac{3M}{2\pi R^3} \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{d \ln M}{d \ln \dot{\gamma}_R} \right) \quad (9.30)$$

Il s'agit d'une correction du type Rabinowitsch ( $\dot{\gamma} = R\omega / d$ ).

### 9.4.2 Avantages et inconvénients du rhéomètre à plaques parallèles

- *Avantages* : pas besoin de grande quantité de fluide, outillage simple, préparation et nettoyage de l'appareil facile.
- *Désavantages* : taux de cisaillement non-homogène, source d'erreur provenant des bords, mal adapté pour mesurer des fluides peu visqueux.

## 9.5 EQUIVALENCE COX-MERZ

Il est parfois difficile de réaliser des essais viscosimétriques avec un gradient de cisaillement  $\dot{\gamma}$  élevé et des déformations suffisamment grandes pour atteindre un état stationnaire. L'utilité des relations de Cox et Merz réside dans le fait qu'il est possible d'étendre la plage des taux de cisaillement dans le but de déterminer les fonctions matérielles ( $\eta$ ,  $G'$ ,  $G''$ ,  $\psi_1$ , ...) d'un fluide donné.

La relation de Cox-Merz illustrée à la Figure 9.8 établit l'équivalence entre  $\dot{\gamma}$  et la pulsation ( $\propto$  fréquence)  $\omega$ . Les deux variables ont pour unité l'inverse d'un temps [ $s^{-1}$ ] :

$$\eta(\dot{\gamma}) = |\eta^*(\omega)| \quad \text{où} \quad \omega = \dot{\gamma} [s^{-1}] \quad (9.31)$$

Il est à noter que les rhéomètres dynamiques peuvent atteindre une zone de  $0.001 < \omega < 100$  rad/s et les rhéomètres capillaires travaillent en général entre  $0.1-10 < \dot{\gamma} < 10'000$   $s^{-1}$ . Cette relation est bien suivie par les polymères à molécules flexibles, mais montre des faiblesses pour certains polyéthylènes à chaîne linéaires et branchées. Lorsque la loi de Cox-Merz est valable, il est alors possible de prédire  $G'$  et  $G''$  connaissant la viscosité en fonction de la pulsation dans le plan complexe, définie comme :

$$\eta^*(\omega) = \eta'(\omega) - i\eta''(\omega) \quad \text{et} \quad |\eta^*| = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}_0} = \sqrt{(\eta')^2 + (\eta'')^2} = \sqrt{\left(\frac{G'}{\omega}\right)^2 + \left(\frac{G''}{\omega}\right)^2} \quad (9.32)$$

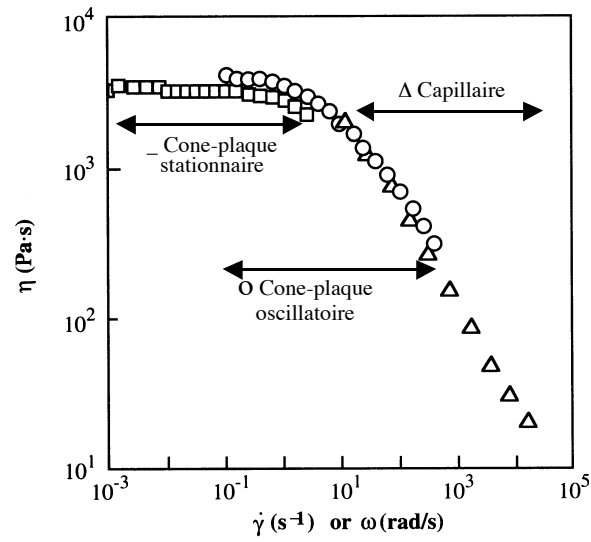


Figure 9.8. Illustration de la relation de Cox-Merz dans le cas du polypropylène à 200°C : les mesures à basse et moyenne vitesse de cisaillement sont effectuées à l'aide d'un rhéomètre cône-plaque (en mode statique puis dynamique), et les mesures à grande vitesse de cisaillement proviennent d'un rhéomètre capillaire.

## 10 ECOULEMENTS TURBULENTS

Ce chapitre aborde l'analyse des écoulements quand le nombre de Reynolds,  $Re$ , dépasse une certaine limite, et que l'on observe un changement de la relation entre le débit (ou la vitesse du fluide) et la chute de pression. On a vu au Chapitre 8 les solutions dans le cas d'écoulements laminaires Newtoniens ou non. Dans ce Chapitre qui reprend des éléments et quelques figures du livre *Fluid Mechanics* de F. White, nous ne considérerons que le cas Newtonien.

### 10.1 APPARITION DE LA TURBULENCE

Des mesures expérimentales avec un anémomètre ou un capteur de pression ont montré que quand la vitesse d'écoulement augmente, une petite perturbation de l'écoulement ne se stabilise plus rapidement comme c'est le cas d'un écoulement laminaire. Cet effet est schématisé à la Figure 10.1 et dépend de  $Re$  (transition vers  $10^3 - 10^4$ ) et de la rugosité de la surface sur laquelle le fluide s'écoule, qui crée des perturbations.

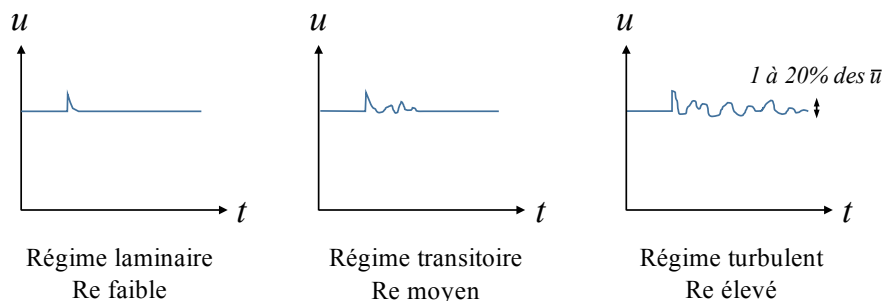


Figure 10.1. Evolution temporelle d'une perturbation de la vitesse d'écoulement  $u$  et transition du régime laminaire vers le régime turbulent.

Les valeurs de  $Re$  pour les différents régimes sont les suivantes :

- $Re < 1$                       écoulement à faible Reynolds, ou dit de "Stokes", ou *creeping flow*
- $Re < 1000$                   écoulement laminaire
- $10^3 < Re < 10^4$         écoulement transitoire (transition  $Re = 2300-2500$  selon les sources)
- $10^4 < Re < 10^6$         écoulement turbulent, dépend de  $Re$
- $10^6 < Re$                   écoulement très turbulent, ne dépend plus de  $Re$

Dans le cas de l'écoulement laminaire on a vu au Chapitre 8 que le flux s'exprime selon :

$$Q = -\frac{\Delta P}{L} \frac{\pi R^4}{8\eta} \quad (10.1)$$

Et avec  $\bar{u} = Q / \pi R^2$  on obtient  $\Delta P = 8\eta L \bar{u} / R^2$ , c'est à dire que la chute de pression  $\Delta P$  est proportionnelle à la vitesse moyenne de l'écoulement  $\bar{u}$ . Quand  $Re$  augmente, on observe un changement de cette dépendance, ce que montre la Figure 10.2 : il faut augmenter beaucoup plus la pression pour un accroissement de vitesse donné, c'est à dire que le fluide résiste plus à l'écoulement.

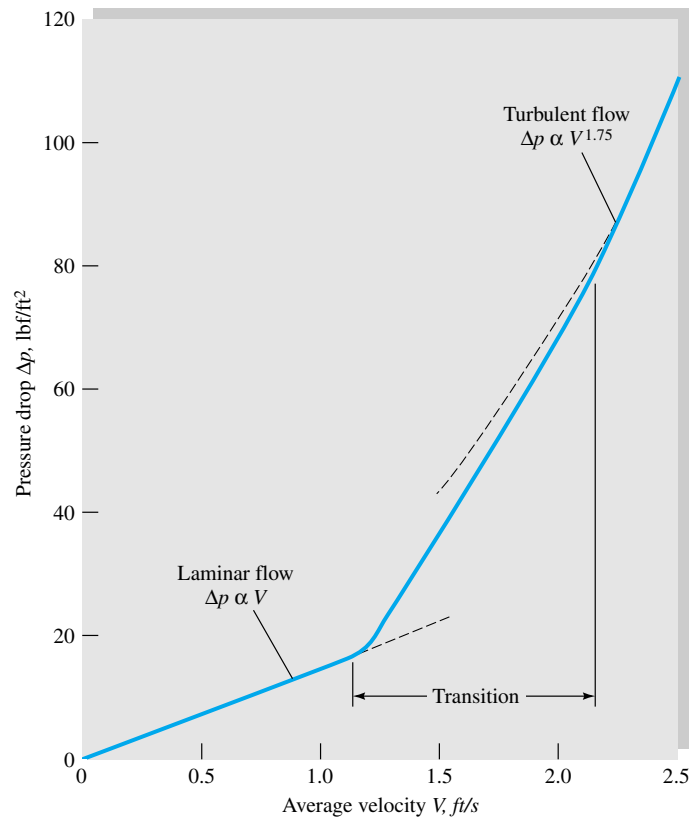


Figure 10.2. Dépendance de la chute de pression dans un écoulement en fonction de la vitesse moyenne de l'écoulement [F. White, Fluid Mechanics].

Tout cela a entraîné des recherches dans les années 1839-1900 pour tenter de modéliser ces effets très complexes, et atteindre des précisions d'environ 5 à 10% pour prédire les écoulements. Les analyses se fondent sur des expériences et sur des méthodes semi-empiriques qui sont encore utilisées aujourd'hui en raison de leur simplicité d'usage. L'idée de base est de considérer les valeurs moyennes des vitesses locales dans le temps.



## 10.2 ANALYSE DE LA TURBULENCE

Les travaux de recherche du 19<sup>ème</sup> siècle ont été surtout développés dans le cadre des écoulements d'eau ou de gaz dans des conduites, raison pour laquelle on utilise souvent des termes hérités de la mécanique des fluides dans le génie civil ou hydraulique. Il est apparu que la rugosité des surfaces sur lesquelles le fluide s'écoule influence fortement l'écoulement du fluide. La démarche développée dans ce qui suit consiste à établir une relation entre la chute de pression et le débit dans une conduite, via un facteur de frottement à la paroi et la rugosité de cette dernière.

### 10.2.1 Hauteur piézométrique

On définit la hauteur piézométrique  $h_g$ , selon le schéma de la Figure 10.3 :

$$h_g = \Delta z + \frac{\Delta P}{\rho g} \quad (10.2)$$

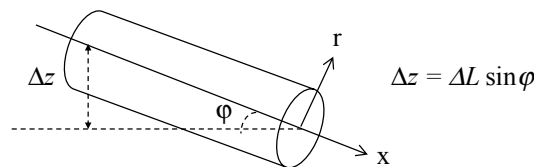


Figure 10.3. Schéma de la géométrie d'écoulement dans une conduite.

### 10.2.2 Frottement

Pour un écoulement incompressible l'équilibre des forces s'écrit :

$$(\Delta P + \rho g \Delta z) \pi R^2 = \tau_w (2\pi R) L \quad (10.3)$$

d'où :

$$\Delta z + \frac{\Delta P}{\rho g} = h_g = \frac{2\tau_w L}{\rho g R} \quad (10.4)$$

On définit le facteur de frottement  $f$ , lié à la contrainte à la paroi  $\tau_w$  et donc à la hauteur piézométrique  $h_g$ , et fonction du nombre de Reynolds ( $Re_D$  pour la géométrie de la conduite de diamètre  $D$ ) et de la rugosité  $\varepsilon$  de la paroi :

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho \bar{u}^2} = \frac{h_g}{\frac{L}{D} \frac{\bar{u}^2}{2g}} = f(Re, \varepsilon/D) \quad \text{où} \quad \bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} \quad (10.5)$$

on a également une relation explicite entre  $\Delta P$  et  $f$  :

$$\Delta P = f \frac{\rho \bar{u}^2}{2} \frac{L}{D} \quad (10.6)$$

Dans le cas d'un écoulement laminaire on a :

$$\bar{u} = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{-\frac{d}{dx}(P + \rho gz)}{2\eta} \frac{\pi R^4}{4\pi R^2} \quad \text{et} \quad \tau_w = -\frac{d}{dx}(P + \rho gz) \frac{R}{2} \quad (10.7)$$

on trouve alors que (avec  $D = 2R$ ) :

$$f = \frac{8\tau_w}{\rho \bar{u}^2} = \frac{64\eta}{\rho \bar{u} D} = \frac{64}{Re_D} \quad \text{avec} \quad Re_D = \frac{\rho \bar{u} D}{\eta} \quad (10.8)$$

Dans le cas d'un écoulement turbulent ce résultat ne s'applique pas.

### 10.2.3 Résolution des équations de Navier-Stokes pour un écoulement turbulent

On part des hypothèses que la densité  $\rho$  et la viscosité  $\eta$  du fluide sont constantes, donc d'un fluide Newtonien incompressible. Ces hypothèses sont valables pour analyser l'écoulement d'eau ou de pétrole, mais pas de gaz. Les équations de continuité (conservation de masse) et de quantité de mouvement (Navier-Stokes) s'écrivent :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (10.9)$$

$$\rho \frac{Du}{Dt} = -\nabla P + \rho g + \eta \nabla^2 u \quad (10.10)$$

où  $D$  représente ici la dérivée totale :

$$\frac{D\vec{u}}{Dt} = \frac{d\vec{u}}{dt} + \vec{u} \text{ grad } \vec{u} \quad (10.11)$$

La résolution de l'équation de Navier-Stokes dans le cas laminaire dans une conduite cylindrique ( $u_x(r)$ ,  $u_r = 0$ ,  $u_\theta = 0$ ), avec a été vue au Chapitre 8. Dans le cas turbulent les 3 composantes de vitesse  $u_x$ ,  $u_r$  et  $u_\theta$  sont non nulles ce qui complique énormément la résolution de l'équation. En 1895 Reynolds propose alors de considérer la moyenne temporelle de la vitesse (voir la Figure 10.1) :

$$\bar{u} = \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta u \, dt \quad (10.12)$$

où  $\Theta$  est la période de moyennage (de l'ordre de 5 s en pratique), supérieure à la période de fluctuations. La fluctuation est alors :

$$u' = u - \bar{u} \quad (10.13)$$

Par définition la valeur moyenne des fluctuations est nulle ( $\bar{u}' = 0$ ). On définit également leur intensité :

$$\overline{u'^2} = \frac{1}{\Theta} \int_0^\Theta u'^2 \, dt \neq 0 \quad (10.14)$$

On réécrit l'équation de Navier-Stokes en remplaçant  $u$  par  $\bar{u}$ , et de même, la pression  $P$  par  $P - P'$ .

Sachant que pour des fonctions continues on a  $\overline{\frac{du_x}{dx}} = \frac{d\bar{u}_x}{dx}$ , les équations de continuité et de quantité de mouvement (sur  $x$ ) prennent la forme :

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{u}_z}{\partial z} = 0 \quad (10.15)$$

$$\rho \frac{d\bar{u}_x}{dt} + \rho \bar{u}_x \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \rho \bar{u}_y \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} + \rho \bar{u}_z \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} =$$

$$-\frac{d\bar{P}}{dx} + \rho g_x + \frac{\partial}{\partial x} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} - \rho \bar{u}_x'^2 \right) + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \rho \bar{u}_x' \bar{u}_y' \right)}_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \eta \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial z} - \rho \bar{u}_x' \bar{u}_z' \right)$$

Le terme 2 dans l'équation 10.16 est non nul :

$$\tau = \eta \frac{\partial \bar{u}_x}{\partial y} - \rho \bar{u}_x' \bar{u}_y' = \tau_{lam} + \tau_{turb}$$

où les contributions laminaires et turbulentes dominent à la paroi et loin de la paroi, respectivement, comme schématisé à la Figure 10.4.

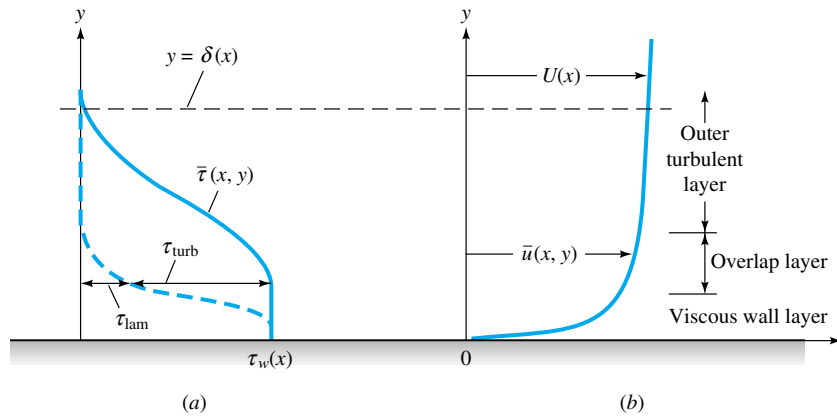


Figure 10.4. Profils de cisaillement (a) de vitesse (b) d'un écoulement turbulent au voisinage de la paroi [F. White, Fluid Mechanics].

La difficulté pour résoudre l'équation 10.15 a conduit Prandtl vers 1930 à formuler des hypothèses sous la forme de la fonction  $\bar{u}(y)$ . En considérant que l'on a  $\bar{u} = f(\eta, \tau_w, \rho, y)$  comme on peut le voir à la Figure 10.4, on définit une vitesse normalisée :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_f}$$

où

$$u_f = \left( \frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2}$$

représente une vitesse de frottement. On dit alors que :

$$u^+ = F\left(\frac{yu_f}{\nu}\right) \quad (10.20)$$

où  $\nu = \eta/\rho$  est la viscosité cinématique. Dans la zone turbulente loin de la paroi  $\bar{u}$  ne dépend pas de  $\eta$  mais de la vitesse au loin,  $U$  et de l'épaisseur de la couche visqueuse  $\delta$  :

$$U - \bar{u} = g(\delta, \tau_w, \rho, y) \quad \text{et} \quad \frac{U - \bar{u}}{u_f} = G\left(\frac{y}{\delta}\right) \quad (10.21)$$

Par exemple :

$$u^+ = \frac{\bar{u}}{u_f} = \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ \frac{yu_f}{\nu} \right\} + B \quad (10.22)$$

Cette loi logarithmique traduit les tâtonnements empiriques de la science au 19<sup>ème</sup> siècle et donne de bons résultats pour les valeurs des paramètres  $\kappa = 0.41$  et  $B = 5$  (Figure 10.5).

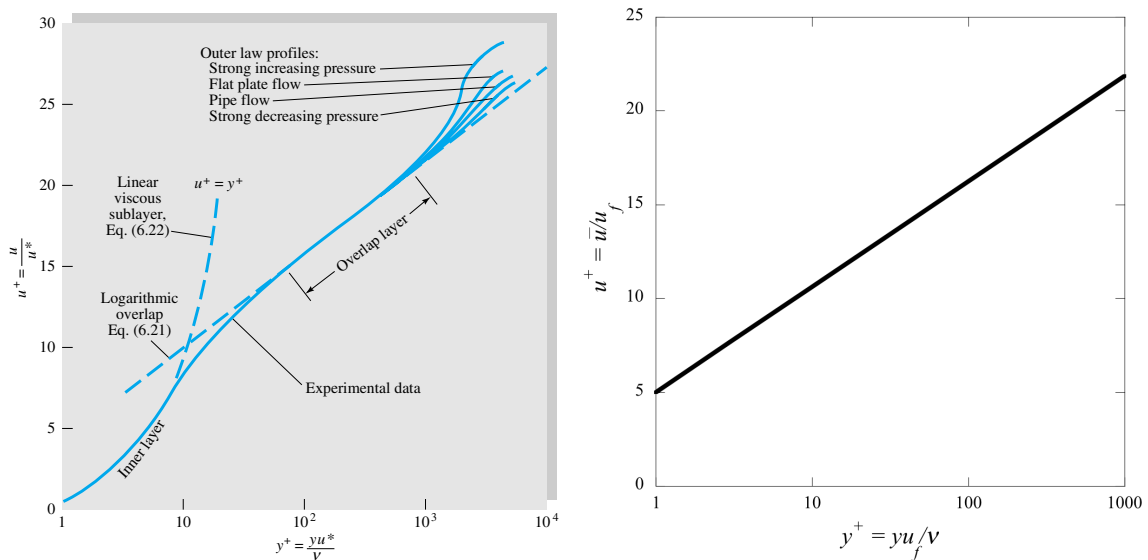


Figure 10.5. Analyse expérimentale des lois de transition (à gauche, [F. White, Fluid Mechanics]) et détail de la relation logarithmique entre la vitesse normalisée de l'écoulement  $u^+$  et la distance normalisée à la paroi  $y^+$ .

Rappelons que l'on cherche une relation entre la perte de charge et le débit, donc entre le frottement et  $Re$ . Testons l'expression logarithmique 10.22 dans le cas d'une conduite tubulaire, avec  $y = R - r$  :

$$\frac{u(r)}{u_f} \approx \frac{1}{\kappa} \ln \left\{ \frac{(R-r)u_f}{\nu} \right\} + B \quad (10.23)$$

On calcule alors la vitesse de l'écoulement :

$$V = \frac{Q}{\pi R^2} = \frac{1}{\pi R^2} \int_0^R u(r) 2\pi r dr = \frac{1}{2} u_f \left( \frac{2}{\kappa} \ln \left\{ \frac{Ru_f}{\nu} \right\} + 2B - \frac{3}{\kappa} \right) \quad (10.24)$$

Et avec  $\kappa = 0.41$  et  $B = 5$  on obtient :

$$\frac{V}{u_f} = 2.44 \ln \left\{ \frac{Ru_f}{\nu} \right\} + 1.34 \quad (10.25)$$

Par ailleurs, en combinant les équations 10.8 et 10.19 on a :

$$\frac{V}{u_f} = \sqrt{\frac{8}{f}} \quad (10.26)$$

Finalement, en 1935 Prandtl réécrit la loi logarithmique en  $\log_{10}$ , ce qui donne :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 1.99 \log \left\{ Re_D \sqrt{f} \right\} - 1.02 \quad (10.27)$$

Cette relation relie le frottement au nombre de Reynolds de l'écoulement. Prandtl ajuste les facteurs numériques et corrige l'équation logarithmique sous la forme suivante, qui décrit l'écoulement turbulent dans des conduites lisses :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = 2 \log \left\{ Re_D \sqrt{f} \right\} - 0.8 \quad (10.28)$$

Les profils de vitesse correspondants aux cas laminaire et turbulent sont schématisés à la Figure 10.6, le cas turbulent étant relié aux équations 10.27 et 10.28. On constate que le profil turbulent est aplati au milieu de l'écoulement, ce qui ressemble au profil pour un fluide rhéofluidifiant laminaire même si les causes physiques sont différentes.

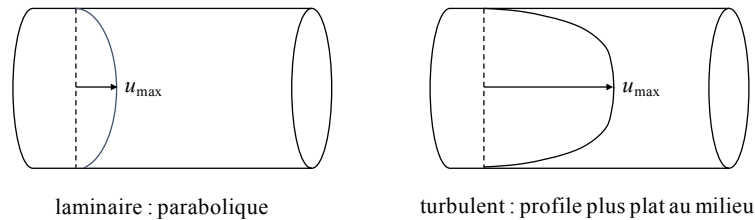


Figure 10.6. Profils de vitesse d'écoulement dans une conduite dans les cas laminaire et turbulent.

### 10.2.4 Influence de la rugosité des parois

Dans le cas d'un écoulement laminaire les parois ont peu d'effet. La vitesse à la paroi est en général nulle et le profil de vitesse pour un fluide Newtonien est alors parabolique comme démontré au Chapitre 8. Dans le cas d'un écoulement turbulent la rugosité de la paroi perturbe l'écoulement et influence fortement le profil de vitesse. Cet effet a été mis en évidence par Nikuradsé, étudiant de Prandtl, qui a analysé l'écoulement dans des conduites revêtues de grains de sable de rugosité calibrée. Il a mesuré  $\Delta P$  et  $Q$  et en déduit la relation entre le frottement  $f$  et  $Re_D$ . Ce résultat est montré à la Figure 10.7.

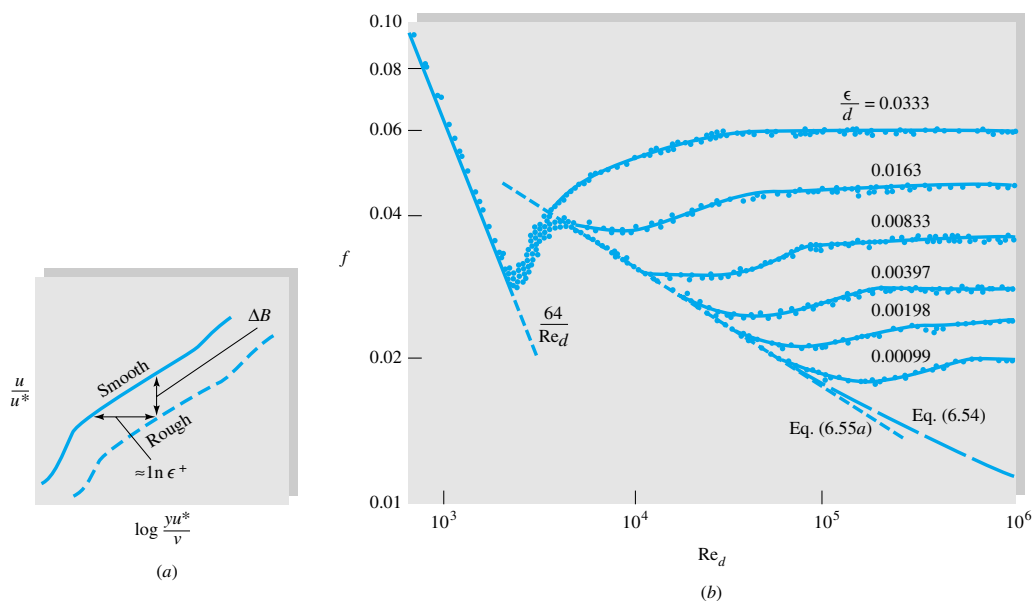


Figure 10.7. Effet de la rugosité sur l'écoulement turbulent dans une conduite, avec décalage vers le bas et la droite (a) et relation entre le frottement et le nombre de Reynolds en régimes laminaire, transitoire et turbulent pour différents rapports rugosité/diamètre de conduite  $\epsilon/D$  (b). L'équation 10.28 correspond à l'équation 6.54 sur le diagramme et  $u^* = u_f$  [F. White, Fluid Mechanics].

On peut classer les écoulements comme suit :

- $\varepsilon u_f / \nu < 5$  lisse
- $5 < \varepsilon u_f / \nu < 70$  transitoire
- $\varepsilon u_f / \nu > 70$  rugueux

A très haute vitesse, pour  $Re_D \sim 10^5$ , i.e., dans le cas rugueux  $f$  devient constant, ce qui correspond à une chute de pression constante. On définit la rugosité normalisée :  $\varepsilon^+ = \varepsilon u_f / \nu$

La zone rugueuse est décrite en adaptant la loi logarithmique :

$$u^+ \approx \frac{1}{\kappa} \ln y^+ + B - \Delta B = \frac{1}{\kappa} \ln \frac{y}{\varepsilon} + 8.5 \quad \text{où} \quad \Delta B \approx \frac{1}{\kappa} \ln \varepsilon^+ - 3.5 \quad (10.29)$$

soit :

$$\frac{V}{u_f} = 2.44 \ln \frac{D}{\varepsilon} + 3.2 \quad (10.30)$$

conduisant à :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon / D}{3.7} \right\} \quad (10.31)$$

qui ne dépend que de  $\varepsilon / D$ , et pas de  $Re_D$ .

### 10.2.5 Diagramme de Moody

En 1939 Colebrook reprend les travaux de Nikuradsé avec de vraies conduites. Il interpole les équations ‘lisse’ (10.28) et ‘rugueuse’ (10.31) et aboutit au résultat :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -2 \log \left\{ \frac{\varepsilon / D}{3.7} + \frac{2.51}{Re_D \sqrt{f}} \right\} \quad (10.32)$$



Ce résultat majeur en mécanique des fluides, avec une précision d'environ 15% est représenté sous la forme d'un abaque par Moody en 1944 montré à la Figure 10.8. Ce diagramme permet de dimensionner des tuyaux, et, par exemple, de déterminer le niveau de rugosité limite pour permettre un débit donné. Ces résultats importants sont utilisés pour la conception de surfaces micro- et nano-structurées afin d'influencer l'écoulement via la couche visqueuse (effets '*shark skin*', éoliennes, capillaires pour applications en biotechnologies).

L'équation (10.32) est difficile à résoudre pour  $f$  et une alternative explicite est due à Haaland :

$$\frac{1}{\sqrt{f}} = -1.8 \log \left\{ \left( \frac{\varepsilon / D}{3.7} \right)^{1.11} + \frac{6.9}{\text{Re}_D} \right\} \quad (10.33)$$

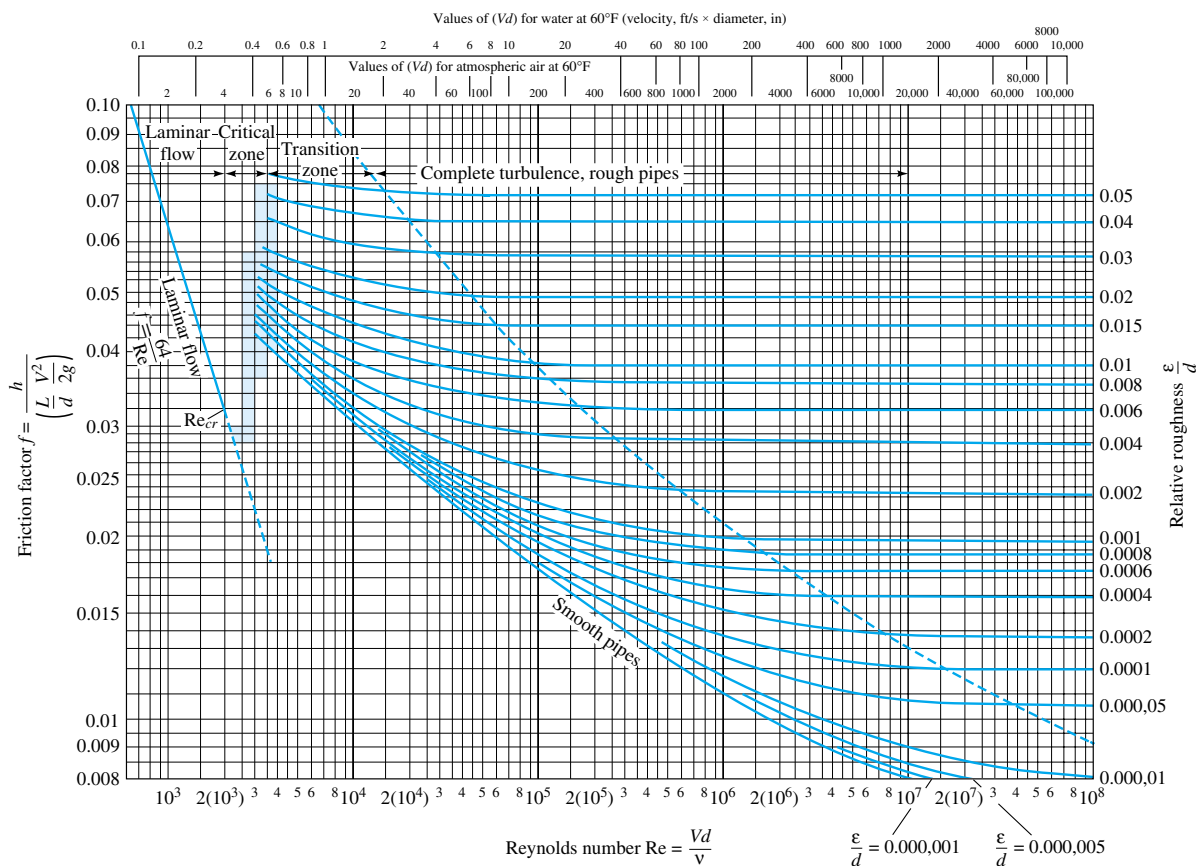


Figure 10.8. Diagramme de Moody [F. White, Fluid Mechanics].

### 10.2.6 Conduites de section non circulaire

Plusieurs facteurs autres que la rugosité de la paroi ont une influence sur les processus de dissipation dans un écoulement, en particulier la géométrie des conduites. Pour des conduites de section non circulaires on recourt à la notion de rayon hydraulique illustrée à la Figure 10.9.

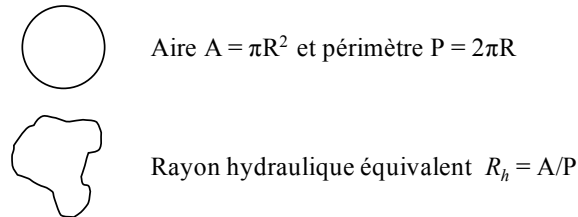


Figure 10.9. Définition du rayon hydraulique pour une conduite de section non circulaire.

Le diamètre hydraulique  $D_h = 4R_h$ , et non  $2R_h$  parce que (voir équation 10.5) :

$$V = \frac{Q}{A} \quad \text{et} \quad h_g = f \frac{LV^2}{4R_h \cdot 2g} \quad (10.34)$$

D'autres facteurs, comme la variation du diamètre de la conduite comme dans le cas de contractions, d'expansions, de coudes, de valves, etc. doivent être pris en compte. Ceci peut être fait par l'ajout de longueurs additionnelles  $\Delta L$ , comme par exemple la correction de Bagley dans le cas du rhéomètre capillaire vu au Chapitre 9.

## 10.3 ÉCOULEMENT LIBRE AVEC CORPS IMMERGÉ ET COUCHE LIMITE

Des écoulements dits libres (sans paroi) avec corps immergés, également appelés écoulements à couche limite sont omniprésents en pratique et donc en mécanique des fluides, comme par exemple en aéronautique, mais également pour des procédés de mise en œuvre par imprégnation de renforts par des fluides visqueux, ou les procédés de dépôts chimiques en phase vapeur ('CVD').

### 10.3.1 Définition de la couche limite

Considérons le problème schématisé à la Figure 10.10 d'une plaque de longueur  $L$ , de largeur  $b$  et d'épaisseur très petite dans un écoulement. Le fluide est 'bloqué' à la surface de la plaque, et donc localement la situation est la même que dans le cas de la conduite, et sa vitesse croît progressivement pour atteindre la vitesse du fluide non perturbé à une certaine distance de la paroi. On définit la couche limite comme le 'lieu'  $\delta(x)$  où la vitesse du fluide  $u = 0.99 u_0$ .

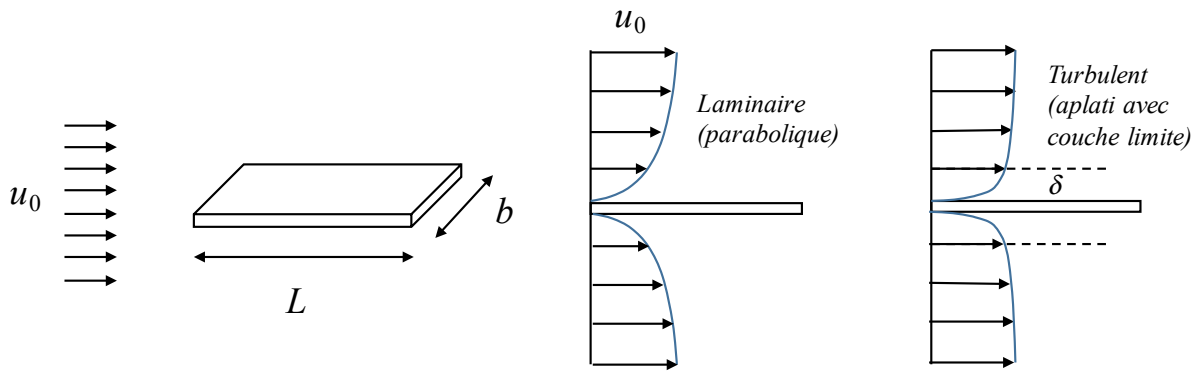


Figure 10.10. Ecoulements laminaires et turbulents perturbés par une plaque fine parallèle à l'écoulement.

### 10.3.2 Equilibre des forces

Regardons la contrainte à la paroi  $\tau_w$  et la force de trainée ('drag')  $F_{drag}$  :

$$dF_{drag} = \tau_w dS = \tau_w b dx \quad \text{d'où} \quad \frac{dF_{drag}}{dx} = \tau_w b \quad (10.35)$$

L'équilibre des forces est traité comme suit :

$$\vec{F}_{drag} = \frac{d}{dt}(m\vec{u}) \quad \text{projeté selon x:} \quad F_{drag} = \frac{d}{dt}(\rho V u) \quad (10.36)$$

où  $V$  représente le volume de fluide compris dans le périmètre 1-4 représenté à la Figure 10.11.

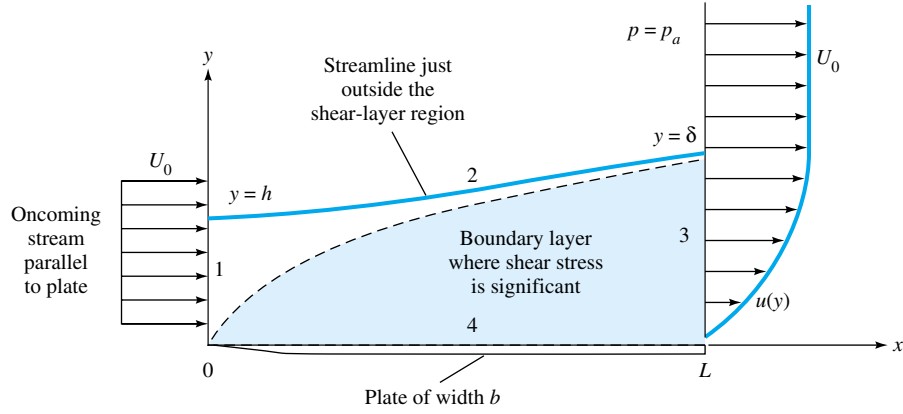


Figure 10.11. Domaine d'intégration pour la résolution de la couche limite [F. White, Fluid Mechanics].

On réécrit l'équation 10.36 :

$$F_{drag} = \frac{d}{dt} \int_V \rho u dV + \rho U \int_A u dA \quad (10.37)$$

Et, selon le profil d'écoulement montré à la Figure 10.11 :

$$\begin{aligned} F_{drag} &= -\rho \int_1 u(0; y) u dA - \rho \int_3 u(L; y) u dA \\ &= -\rho \int_0^h u_0 (-u_0) b dy - \rho \int_0^\delta u(L; y) u(L; y) b dy \\ &= \rho u_0^2 b h - \rho b \int_0^\delta u^2(L; y) dy \end{aligned} \quad (10.38)$$

### Conservation de la masse

$$u_0 h = \int_0^\delta u(L; y) dy \quad (10.39)$$

d'où l'équation proposée par Kármán en 1921 :

$$\begin{aligned} F_{drag} &= \rho b u_0 \int_0^\delta u(L; y) dy - \rho b \int_0^\delta u^2(L; y) dy = \rho b \int_0^\delta (u_0 u(L; y) - u^2(L; y)) dy \\ &= \rho b u_0^2 \underbrace{\int_0^\delta \left(1 - \frac{u}{u_0}\right) \frac{u}{u_0} dy}_{\vartheta} \bigg|_{x=L} \end{aligned} \quad (10.40)$$

et :

$$\tau_w = \frac{1}{b} \frac{dF_{drag}}{dx} = \rho u_0^2 \frac{d\vartheta}{dx} \quad (10.41)$$

Ces deux équations sont résolues sur la base d'hypothèses sur  $u$ , ou sur le terme  $\vartheta$  comme suit.

### 10.3.3 Cas laminaire

Dans le cas laminaire le profil de vitesses  $u(x; y)$  est parabolique, ce que Kármán approxime :

$$u(x; y) \equiv u_0 \left( \frac{2y}{\delta} - \frac{y^2}{\delta^2} \right) \quad 0 < y < \delta(x) \quad (10.42)$$

Ce qui permet d'obtenir les termes suivants :

$$\tau_w = \eta \left. \frac{du}{dy} \right|_{y=0} \approx \frac{2\eta u_0}{\delta} \quad (10.43)$$

$$F_{drag} = \rho b u_0^2 \frac{2}{15} \delta \quad \left( \vartheta \approx \frac{2}{15} \delta \right) \quad (10.44)$$

la couche limite laminaire :

$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{5.5}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad \text{et} \quad \text{Re}_x = \frac{\rho u_0 x}{\eta} \quad (10.45)$$

ainsi que le coefficient de frottement de peau ('skin friction'), analogue au coefficient de frottement dans le cas de l'écoulement dans une conduite :

$$c_f = \frac{2\tau_w}{\rho u^2} \approx \sqrt{\frac{\frac{8}{15}}{\text{Re}_x}} = \frac{0.73}{\sqrt{\text{Re}_x}} \quad (10.46)$$

et le fameux coefficient de trainée qui, dans le cas d'un écoulement laminaire s'écrit :

$$C_D = \frac{F_{drag}(L)}{\frac{1}{2}\rho u^2 bL} \quad (10.47)$$

ce qui peut se généraliser pour tout corps de géométrie quelconque :

$$C_D = \frac{F_{drag}}{\frac{1}{2}\rho u^2 A} \quad (10.48)$$

où A représente l'une des aires suivantes :

- aire frontale, i.e. projection du corps perpendiculairement à l'écoulement, utilisée pour des objets épais immergés, des automobiles, des missiles ...,
- aire de plan, i.e. projection de l'objet vu de dessus, utilisées pour des corps larges et plats comme des ailes et hydrofoils,
- aire mouillée, utilisée typiquement pour des bateaux

On définit de façon analogue le coefficient de portance  $C_L$  lié à la force de portance ('*lift*')  $F_{lift}$  :

$$C_L = \frac{F_{lift}}{\frac{1}{2}\rho u^2 A} \quad (10.49)$$

Le Tableau 10.1 donne des valeurs de  $C_D$  pour différentes géométries.


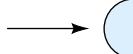
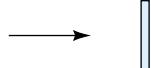
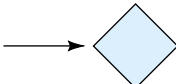
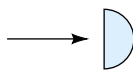
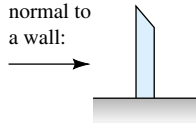
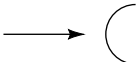
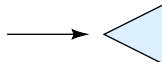

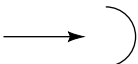
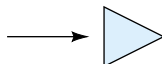

### 10.3.4 Cas turbulent

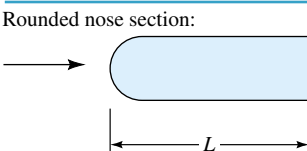
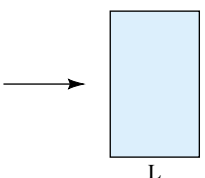
Dans le cas turbulent le profil de vitesses  $u(x;y)$  est donné par la loi logarithmique (équation 10.22). La couche limite turbulente valable quand le corps n'est pas rugueux est donnée par :





$$\frac{\delta}{x} \approx \frac{0.16}{Re_x^{1/7}} \quad (10.50)$$

De nombreuses approximations ont été proposées pour calculer le coefficient de trainée  $C_D$  dans ce cas, et plusieurs valeurs sont reportées au Tableau 10.1. On constate par ailleurs que  $C_D$  ne dépend pas trop de  $Re$  en régime turbulent.

Tableau 10.1. Coefficient de trainée de corps bidimensionnels pour  $Re > 10^4$ .

Shape	$C_D$ based on frontal area	Shape	$C_D$ based on frontal area	Shape	$C_D$ based on frontal area
Square cylinder: 	2.1	Half-cylinder: 	1.2	Plate: 	2.0
	1.6		1.7	Thin plate normal to a wall: 	1.4
Half tube: 	1.2	Equilateral triangle: 	1.6	Hexagon: 	1.0
	2.3		2.0		0.7

Shape	$C_D$ based on frontal area								
Rounded nose section: 	$L/H:$	0.5	1.0	2.0	4.0	6.0			
	$C_D:$	1.16	0.90	0.70	0.68	0.64			
Flat nose section 	$L/H:$	0.1	0.4	0.7	1.2	2.0	2.5	3.0	6.0
	$C_D:$	1.9	2.3	2.7	2.1	1.8	1.4	1.3	0.9

Elliptical cylinder:	Laminar	Turbulent
1:1 	1.2	0.3
2:1 	0.6	0.2
4:1 	0.35	0.15
8:1 	0.25	0.1





**TROISIEME PARTIE**  
**RHÉOLOGIE DES FLUIDES**  
**COMPLEXES**



# 11 CHEMORHEOLOGIE

## 11.1 INTRODUCTION

La chémorhéologie est, comme son nom l'indique, la rhéologie des systèmes qui réagissent chimiquement. Un exemple typique et d'application courante est celui des résines thermodurcissables, qui réticulent sous l'action de la chaleur et du temps, ce qui s'accompagne d'une augmentation considérable de la viscosité : le matériau passe de l'état liquide à l'état solide. En général, en rhéologie des liquides, on développe des techniques de mesure et d'analyse qui nécessitent de maintenir l'échantillon à la température désirée pendant un certain temps, au cours duquel on peut faire varier la fréquence de sollicitation, son amplitude, etc... Dans le cas de systèmes réactifs, on ne peut se permettre ceci, car la réaction avance au cours du temps et entre en compétition avec le temps nécessaire pour faire une mesure. Il faut donc développer de nouvelles approches.

Les applications sont nombreuses dans le domaine de la mise en œuvre des composites et des polymères, mais il existe aussi de nombreux exemples dans ceux de la nourriture ou de la biologie. Par exemple, la mise en œuvre des composites par moulage par transfert de résine (*Resin Transfer Molding*, RTM) consiste à injecter une résine polyester ou époxyde dans un moule qui contient déjà les fibres assemblées en une préforme. On veut être sûr que la résine est suffisamment fluide quand on l'injecte et qu'elle le reste pendant tout le temps que dure l'imprégnation des fibres. Ensuite, il faut que la viscosité de la résine monte, jusqu'à ce que l'on ait une pièce assez solide pour pouvoir la démouler. Il est donc primordial, pour optimiser les paramètres de mise en œuvre, tels que la température ou la pression d'injection (qui dicte la vitesse de remplissage), de connaître précisément comment évolue la viscosité de la résine avec le temps et la température. D'autre part, chauffer davantage la résine baisse sa viscosité en un premier temps, ce qui rend l'infiltration plus rapide, mais cela augmente la vitesse de réticulation, donc la viscosité évoluera plus vite. Il faut donc trouver l'optimum.

D'autres exemples plus pratiques se trouvent dans la vie de tous les jours. Quand on fait cuire un œuf, le blanc réagit chimiquement sous l'action de la chaleur pour réticuler et devenir un solide. Le lait fermente sous l'action des levures pour former un gel que l'on appelle yaourt. La farine et le lait, sous l'action de la chaleur, subissent une réaction de Maillard pour former un

solide que l'on appelle sauce blanche ou flan, suivant l'application et les quantités en jeu. La chémorhéologie est donc l'étude d'éléments essentiels de la vie courante.

## 11.2 RAPPELS SUR LA RETICULATION DES THERMODURCISSABLES

### 11.2.1 Chimie de la réaction

Les résines thermodurcissables, par opposition aux thermoplastiques, sont des résines qui réagissent au cours de leur mise en œuvre pour former des liaisons chimiques irréversibles. Le matériau ne peut plus être fondu quand on le chauffe, il peut seulement devenir caoutchoutique et/ou se dégrader. Quelques exemples sont donnés ci-dessous :

a) Une résine époxyde réticulée est constituée d'un monomère, par exemple un bisphénol A avec des groupements époxydes, et d'un durcisseur (le plus souvent une amine ou un anhydride). Ces deux composants sont montrés à la Figure 11.1. Ils réagissent pour ouvrir le groupement époxyde et former des liaisons chimiques. Au fur et à mesure de la réaction, de plus en plus de liaisons chimiques se forment, et un réseau tridimensionnel se met en place.

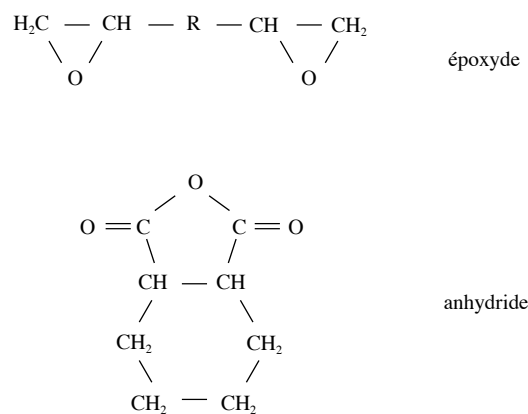


Figure 11.1. Exemple de structure chimique d'une résine époxyde, où R représente deux groupements phénol, et d'un durcisseur anhydride.

b) Une résine polyester, souvent utilisée pour faire des coques de bateau, des pièces de carrosserie automobile (*Sheet Molding Compound*), réticule après adjonction de styrène comme le montre la Figure 11.2. Comme toute réaction chimique, la réticulation d'un thermodurcissable est activée par la température suivant une loi d'Arrhenius. De plus, on peut quantifier l'avancement de la réaction en mesurant le degré de réticulation  $\alpha$  :

$$\alpha = \frac{\Delta H}{\Delta H_{TOT}} \quad (11.1)$$

où  $\Delta H$  est la chaleur de réaction mesurée par calorimétrie différentielle à balayage (DSC) à l'instant  $t$ , et  $\Delta H_{TOT}$  est la chaleur de réaction totale.

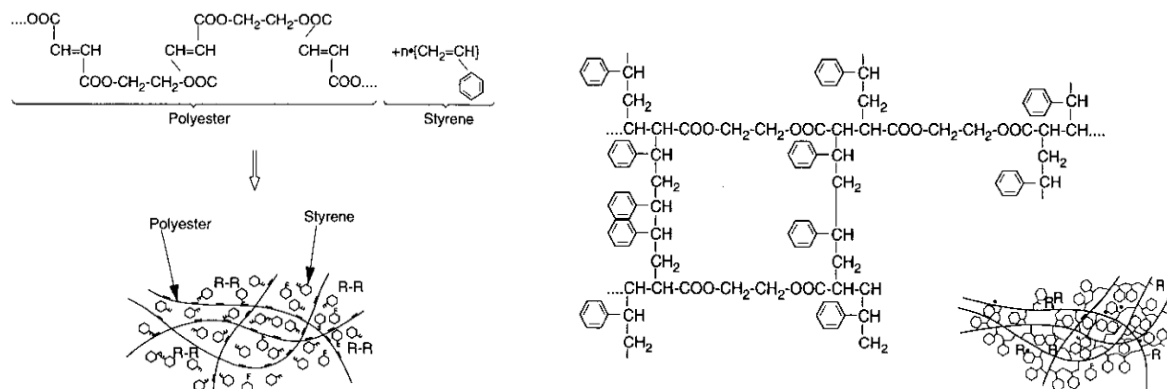


Figure 11.2 Représentation symbolique et schématique d'un polyester insaturé non-réagi (à gauche) et réticulé (à droite), d'après Osswald.

Un exemple de thermogramme DSC est donné à la Figure 11.3. Celui-ci représente le flux thermique, soit  $dH/dt$ , en fonction du temps. La chaleur de réaction au temps  $t_i$  est donnée par l'intégrale sous la courbe jusqu'au temps  $t_i$ , soit :

$$\Delta H = \int_0^{t_i} \frac{dH}{dt} dt \quad (11.2)$$

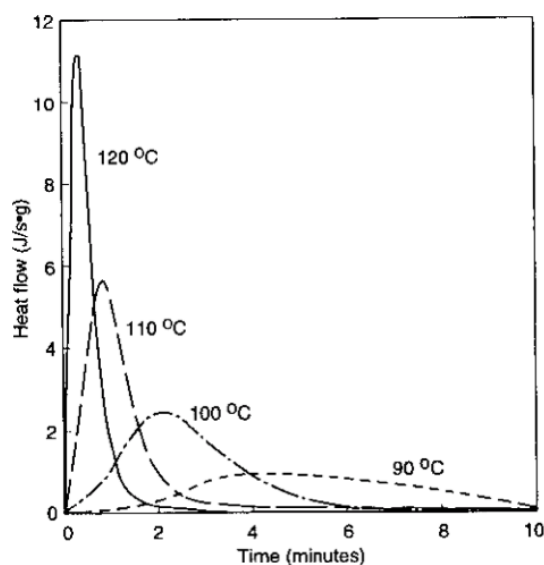


Figure 11.3. Thermogramme (courbe de calorimétrie différentielle) montrant le flux de chaleur en fonction du temps pour la réticulation isotherme d'un vinyl-ester à différentes températures.

Le degré d'avancement suit en général une loi du type autocatalytique :

$$\frac{d\alpha}{dt} = k_0 \exp\left(-\frac{E}{RT}\right) \alpha^m (1-\alpha)^n \quad (11.3)$$

où  $k_0$  est la constante cinétique,  $E$  l'énergie d'activation,  $R$  la constante des gaz parfaits,  $T$  la température en Kelvin et  $n$  et  $m$  des paramètres appelés ordres réactionnels.

On peut donc en général connaître, pour une température donnée, le degré d'avancement chimique de la réaction en fonction du temps.

### 11.2.2 Rhéologie de la réaction

Le mélange de départ est en général un liquide Newtonien (viscosité basse), constitué de petites molécules qui sont les unités de base du polymère. Au fur et à mesure que la réaction progresse, la masse moléculaire croît pour atteindre l'infini (dicté en fait par la taille de l'échantillon) et le liquide se transforme en solide. A la fin de la réticulation, on est en présence d'un solide viscoélastique. Entre les deux, on a un matériau qui exhibe les propriétés du solide et du liquide, que l'on appelle un gel, comme indiqué sur la Figure 11.4.

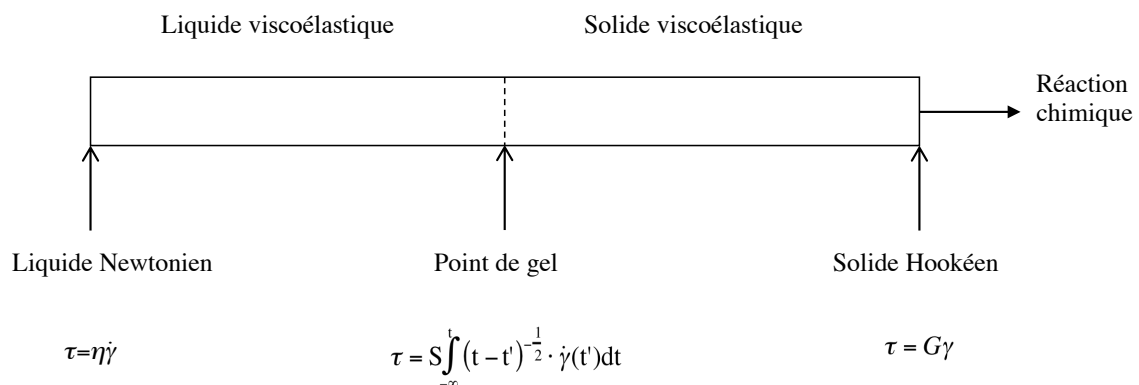


Figure 11.4. Evolution des propriétés d'une résine au cours de la réaction de réticulation,  $\eta$  est la viscosité,  $S$  la résistance du réseau au point de gel et  $G$  le module de cisaillement.

La gélification ou le point de gel correspond à la formation d'un réseau infini tridimensionnel. C'est donc le point de transition entre le liquide et le solide. La viscosité tend vers l'infini et on commence à pouvoir mesurer le module de Young du matériau.

Le temps de gel, pour une réaction à une température constante donnée, peut être calculé, car il correspond à un taux de conversion bien précis, qui est fonction de la fonctionnalité des matériaux en présence. Par exemple, typiquement pour un époxyde, le taux de conversion à gélification est aux environs de 70%. Ce qui veut dire que le réseau est déjà tridimensionnel, mais la réaction n'est pas encore finie, et il reste encore des liaisons époxydes à ouvrir. Le matériau continue donc d'évoluer chimiquement, ce qui contribue à augmenter ses propriétés mécaniques, qui seront maximales quand la conversion est totale.

Une autre grandeur importante à mentionner, qui n'est pas liée à proprement parler à la réaction chimique, mais qui est liée au fait que les matériaux thermodurcissables forment un réseau réticulé amorphe, est la transition vitreuse. Quand on refroidit un matériau amorphe, il ne cristallise pas à une certaine température, mais il passe à un état vitreux. Cet état est un état solide, mais correspond en fait à une structure liquide figée. Pour une résine thermodurcissable, le mélange de départ entre le monomère et le durcisseur est constitué de petites molécules et est souvent liquide à température ambiante, mais possède une température de transition vitreuse,  $T_g$  (appelée  $T_{g0}$ ), en dessous de laquelle la résine est un solide vitreux non-réticulé. Quand la réaction progresse, les molécules deviennent plus grosses, donc plus faciles à figer, et donc  $T_g$  augmente. Quand tout le matériau est réticulé,  $T_g$  est maximale et est appelée  $T_{g\infty}$ .

Au cours d'une expérience de réticulation isotherme, comme  $T_g$  croît avec le taux de conversion, il arrive un moment où  $T_g$  devient égale à la température de cuisson : on est alors au temps de vitrification. En fonction du matériau et de la température de l'expérience, on atteint la vitrification avant (sol vitreux) ou après la gélification (sol-gel vitreux) comme nous le verrons plus en détails à la Section 11.4. En général, on essaie de se placer dans un domaine où la gélification intervient avant la vitrification, sinon les propriétés mécaniques du matériau ne sont pas très bonnes.

## **11.3 MESURES RHEOLOGIQUES SUR DES SYSTEMES REACTIFS**

### **11.3.1 Le problème**

Il existe des méthodes spécifiques pour mesurer les propriétés rhéologiques des liquides et des solides, vues au Chapitre 9. Le problème, avec la chémorhéologie, est que l'on couvre une très large gamme de viscosité et de module quand on passe du liquide au solide, comme montré sur

la Figure 11.5. On peut donc mesurer indépendamment la viscosité, jusqu'à la limite de l'instrument ou la rupture de l'échantillon, et puis on peut ensuite mesurer le module sur le solide. Mais il reste alors une grande incertitude sur le temps de gélification, car aucune de ces méthodes ne peut être utilisée au voisinage du temps de gel.

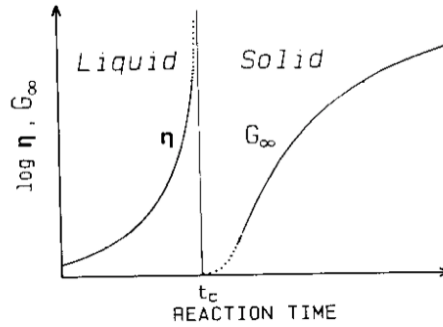


Figure 11.5. Schéma de l'évolution de la viscosité en cisaillement continu et du module d'équilibre d'un polymère qui réticule.

### 11.3.2 La méthode

La méthode couramment utilisée est d'effectuer un cisaillement oscillatoire de petite amplitude sur la résine maintenue dans le four d'un rhéomètre à plaques parallèles et de mesurer les modules  $G'$ ,  $G''$ , leur rapport  $\tan(\delta)$  (voir Chapitre 3) et la viscosité. On applique une déformation :

$$\gamma = A \sin(\omega t) \quad (11.4)$$

et on enregistre une contrainte déphasée d'un angle de déphasage  $\delta$  :

$$\tau = \tau_0 \sin(\omega t + \delta) \quad (11.5)$$

Les modules de cisaillement ont donc une composante en phase, dite d'élasticité :

$$G' = \cos(\delta) \cdot \frac{\tau}{\gamma} \quad (11.6)$$

et en opposition de phase, dite visqueuse ou de perte :

$$G'' = \sin(\delta) \cdot \frac{\tau}{\gamma} \quad (11.7)$$



Le module complexe est alors :

$$G^* = \sqrt{G'^2 + G''^2} \quad (11.8)$$

Il en est de même pour la viscosité :

$$\eta' = \frac{G'}{\omega} \quad (11.9)$$

$$\eta'' = \frac{G''}{\omega} \quad (11.10)$$

$$\eta^* = \frac{G^*}{\omega} \quad (11.11)$$

L'angle de déphasage est alors facilement calculé par :

$$\tan(\delta) = \frac{G''}{G'} \quad (11.12)$$

Des courbes de réponse typique sont données à la Figure 11.6. Au début, la viscosité et les autres paramètres baissent, car on est en phase de chauffe de l'échantillon, puis la température se stabilise à la valeur désirée. On observe qu'au bout d'un certain temps à la température T choisie, le module de perte  $G''$  augmente fortement, suivi de  $G'$  et de la viscosité. Cela correspond aussi à une évolution de  $\tan(\delta)$ , et représente le fait que l'on atteint la gélification. Ensuite,  $G'$  et  $G''$  se stabilisent, et  $G''$  décroît au moment où la vitrification se produit. Un deuxième pic de  $\tan(\delta)$  est aussi observé quand  $G''$  cesse de croître fortement. On observe ainsi l'évolution en continu des grandeurs caractéristiques de la résine au cours de la réticulation.

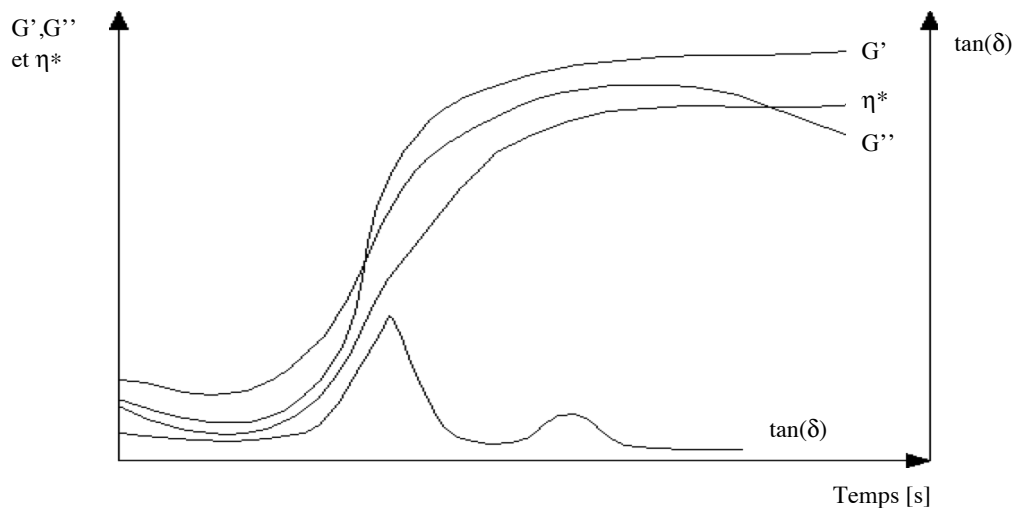


Figure 11.6. Exemple de réponses obtenues en cisaillement oscillatoire entre des plaques parallèles.

Une méthode similaire, très employée dans le cas des composites, est de placer la résine sur une mèche de fibres, qui est ensuite fixée par ses deux extrémités à des mors, que l'on sollicite de même en torsion oscillatoire de faible amplitude, voir Figure 11.7. Les réponses sont semblables, l'avantage de cette méthode est que l'on peut tester des résines déjà imprégnées sur les fibres par le fabricant, et que l'on peut mesurer un module dès le début de l'expérience, car les fibres confèrent une rigidité mécanique à l'ensemble. Le problème est que l'on ne mesure pas les grandeurs intrinsèques de la résine quand on utilise une telle méthode.

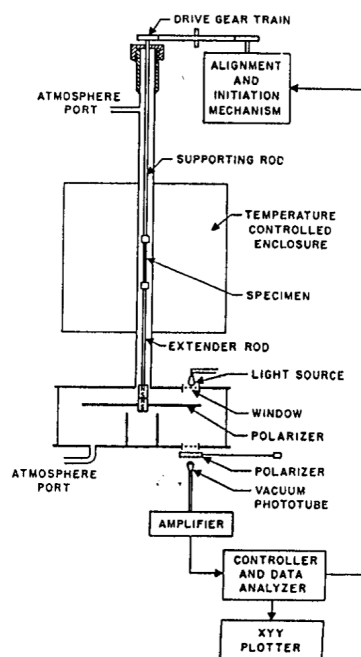


Figure 11.7. Diagramme schématique d'un pendule de torsion automatique pour les essais de torsion sur mèche. Un signal électrique analogue résulte de l'utilisation d'un rayon de lumière qui traverse une paire de polariseurs, dont un oscille avec l'échantillon.

### 11.3.3 Mesure du temps de gel

A partir des courbes de la Figure 11.6, on peut dire que le temps de gélation est atteint quand la viscosité ainsi que les modules augmentent brutalement. Pour obtenir une valeur précise, il existe plusieurs approches qui sont souvent utilisées :

- le premier pic de  $\tan(\delta)$  correspond à une augmentation brutale du déphasage, donc au passage de l'état liquide visqueux à l'état solide viscoélastique.
- le point d'intersection de  $G'$  et  $G''$ , qui correspond à  $\tan(\delta) = 1$ , peut aussi être pris comme point de gel, car il correspond au moment où la partie élastique du module prend le pas sur la partie visqueuse. Cette méthode est préconisée par la norme ASTM.
- le moment où la viscosité dépasse une certaine valeur, par exemple 100 Pa.s est parfois pris comme temps de gel (méthode pratique en milieu industriel).

Ceci dit, le temps de gel ne devrait pas être fonction de la fréquence de sollicitation, à moins que la fréquence ne soit trop rapide et que la réaction chimique ne soit modifiée par le cisaillement, ou que l'on ait interférence avec un autre phénomène, tel que la vitrification. Cependant, les méthodes présentées ci-dessus donnent des résultats qui souvent peuvent varier avec la fréquence. Une troisième méthode, préconisée par Chambon et Winters permet de détecter de manière plus "scientifique" le point de gel, en faisant la mesure à trois fréquences différentes, et en prenant le point d'intersection de  $\tan(\delta)$  pour les trois fréquences, en fonction du temps. La raison pour laquelle cette méthode est préconisée est rhéologique : au point de gel, comme montré sur la Figure 11.8, la résine a un comportement de type loi de puissance, et  $G'$  et  $G''$  sont donc des droites dans un diagramme log-log en fonction du temps.

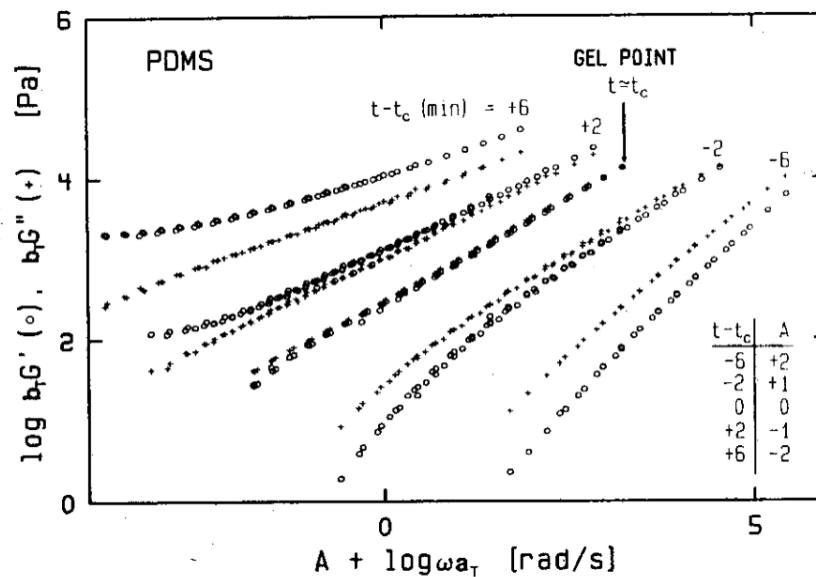


Figure 11.8. Modules d'élasticité et de perte (réduits) pour des échantillons de polydiméthylsiloxane (PDMS) pour lesquels la réaction a été stoppée à des étapes intermédiaires de la conversion.  $T$  est l'instant correspondant au point de gel. Les courbes sont décalées d'une valeur  $A$ , pour qu'elles ne se superposent pas sur le dessin (Winter et Chambon, 1987).

### 11.3.4 Mesure du temps de vitrification

Il existe plusieurs méthodes de détection de la vitrification à partir de la réponse rhéologique (Figure 11.6). Cette détection reste toujours un peu difficile car la vitrification ne correspond pas vraiment à un changement important des propriétés rhéologiques de la résine, comme l'était le point de gel. En général, on peut dire que l'on atteint l'état vitreux quand le module de perte  $G''$  cesse d'augmenter et commence à décroître, ce qui veut dire que la partie visqueuse du module perd de l'importance. Ceci peut correspondre à un second pic de  $\tan(\delta)$ . Trois critères pour déterminer la vitrification ont été proposés :

- pic de  $\tan(\delta)$  à une fréquence de 1 Hz,
- maximum de  $G''$  à 1 Hz,
- début ou fin de la dépendance en fréquence de  $G'$  (ce critère implique que la gélification survienne avant la vitrification).

## 11.4 LE DIAGRAMME T-T-T

Une fois que l'on est capable, pour une expérience de réticulation isotherme, de déterminer quel est le temps de gel, quelle est l'évolution de la viscosité, et quel est le temps de vitrification, on

peut commencer à construire un diagramme qui donne l'évolution de ces temps et de la viscosité pour chaque température. On peut rendre ensuite ce diagramme plus complet en ajoutant les valeurs des températures de transition connues. Cela donne finalement un diagramme Temps-Température-Transformation (TTT), proposé par Gilham dans les années 80, similaire aux diagrammes TTT rencontrés en métallurgie. La Figure 11.9 donne un exemple d'un tel diagramme complet.

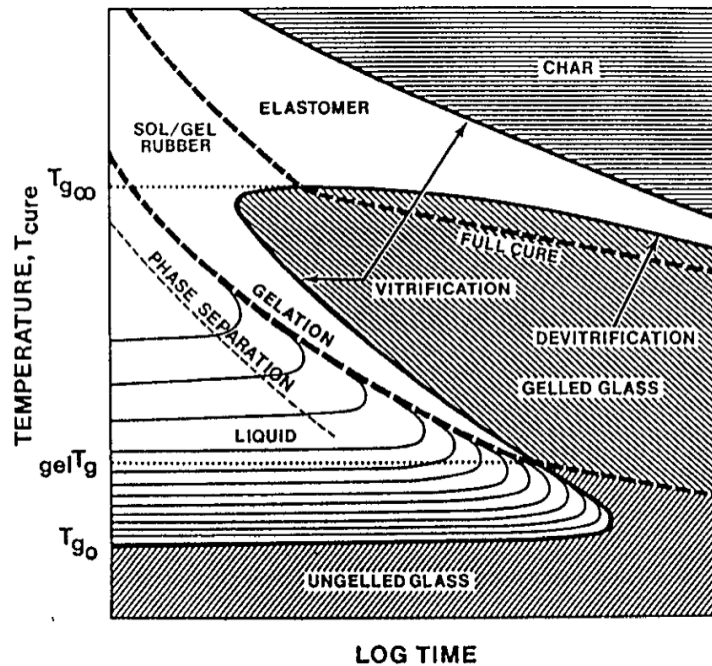


Figure 11.9. Diagramme Temps-Température-Transformation pour un système polymère thermodurcissable réactif montrant les différents états rencontrés durant une réticulation isotherme (Gilham).

On distingue plusieurs états : liquide, verre non gélifié, verre gélifié, sol-gel caoutchoutique, élastomère, matière carbonisée (char). On distingue aussi plusieurs températures vitreuses caractéristiques :

- $T_{g0}$  est la température de transition vitreuse du mélange non réagi,
- $gelT_g$  est la température pour laquelle le temps de gélification est égal au temps de vitrification,
- $T_{g\infty}$  est la température de transition vitreuse pour le matériau complètement réticulé.

La ligne de réticulation complète (full cure) représente la ligne pour laquelle  $T_g = T_{g\infty}$ , et sépare la région de gel vitrifié en sol-gel vitrifié, et gel vitrifié (au-dessus). La ligne de dévitrification correspond à la ligne où  $T_g$  passe en dessous de  $T_{cuisson}$ , et correspond à une dégradation du matériau.

Des lignes de contours iso-viscosité sont aussi représentées dans la zone liquide. Ces lignes sont espacées d'un facteur 10. Le diagramme montre aussi en pointillés le temps de séparation de phase. Ceci arrive quand une deuxième phase est préalablement dissoute dans le matériau, qui se sépare pendant la réticulation, si possible avant la gélation. Ce cas est courant pour des époxydes où on introduit une phase caoutchoutique pour améliorer la ténacité.

Ce diagramme est pratique pour déterminer la fenêtre de mise en œuvre d'une résine. Il faut en général se placer entre  $T_g$  et  $T_{g\infty}$ , pas trop au-dessus de  $T_{g\infty}$  car la dégradation risque de se produire. Grâce au diagramme, on peut déterminer, pour une température donnée, quand arrive le temps de gélation, et le temps de vitrification, et à peu près comment évolue la viscosité. On voit bien que plus la température est haute, plus la viscosité sera basse, mais plus les temps seront courts.

---

## 12 PHENOMENOLOGIE DES SUSPENSIONS ET EMULSIONS

### 12.1 PHENOMENOLOGIE

Une suspension est une dispersion de particules solides dans un fluide. Selon la concentration et la géométrie des particules on parle de suspensions diluées, semi-concentrées ou concentrées. On retrouve des suspensions dans de très nombreuses situations, en particulier dans les domaines alimentaire (pâtes), de la construction (béton), ou de la biologie (sang). La rhéologie des suspensions présente des comportements riches et complexes liés à la taille et à la forme des particules et aux interactions fluide-particules et entre les particules elles-mêmes.

#### 12.1.1 Classification et typologie

Les liquides peuvent être divisés en sous-classes de liquides qui peuvent à leur tour être divisées et ainsi de suite. Une telle classification incluant les suspensions est représentée à la Figure 12.1.

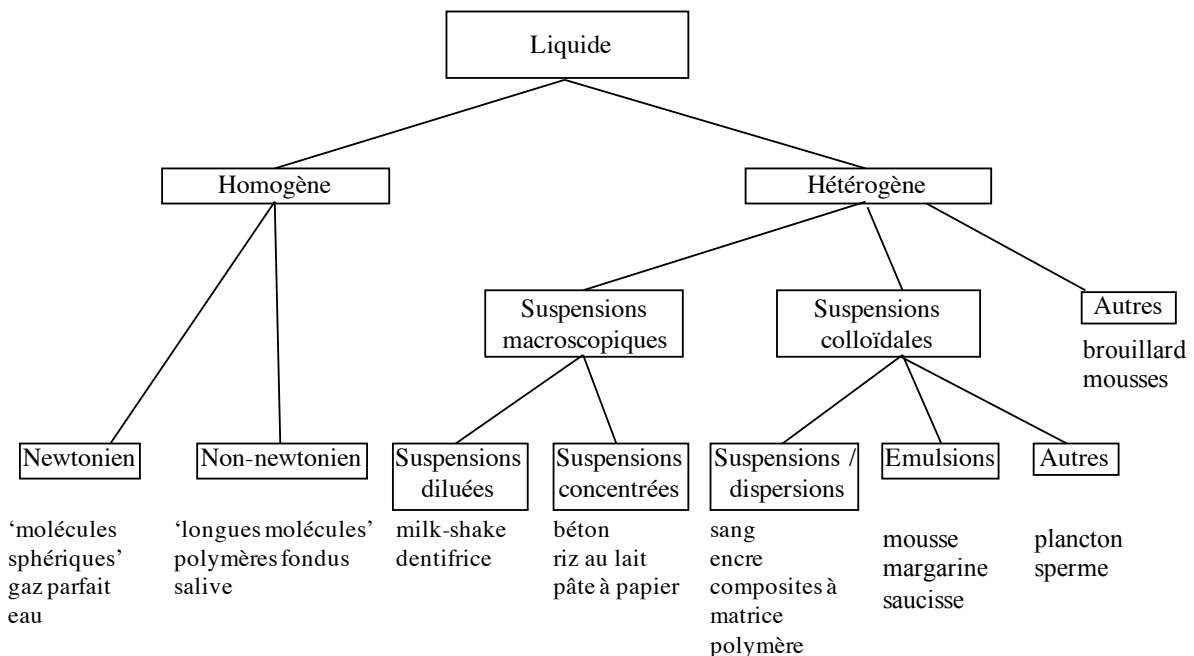


Figure 12.1. Une des classifications possibles des liquides.

Selon la taille des particules, les suspensions peuvent être classées en deux grandes catégories : les suspensions colloïdales où la taille des particules est inférieure à 1  $\mu\text{m}$  et les suspensions

macroscopiques qui sont constituées essentiellement d'inclusions dont le diamètre est supérieur à 1  $\mu\text{m}$ . Il existe d'autres critères de classification, tels la concentration, le type de suspension, la réactivité, etc...

La présence d'une phase en suspension affecte la rhéologie du liquide de deux façons, formant la base de deux approches analytiques décrites comme suit.

### 12.1.2 Effets hydrodynamiques et formation de réseaux

Le premier effet lié à l'ajout de particules dans un fluide est hydrodynamique et concerne dans la plupart des cas des suspensions macroscopiques inertes. La Figure 12.2a illustre un champ de vitesse d'un écoulement homogène, et la Figure 12.2b un champ de vitesse d'écoulement perturbé par une seconde phase (suspension). Les caractéristiques de la suspension qui affectent le comportement de la solution sont :

- la concentration  $\rightarrow$  interaction mécanique entre particules aux concentrations élevées,
- la forme des particules (facteur de forme, rapport de dimensions, convexité),
- la polydispersité (les particules ont des tailles différentes),
- le rapport entre la taille des particules et celle du canal d'écoulement.

La Figure 12.2 suggère que pour comparer la viscosité de suspensions de concentrations différentes, il faudrait les représenter sur un graphe qui montre la viscosité en fonction de la contrainte et non du taux de cisaillement. En effet, la vitesse de cisaillement locale est discontinue dans le fluide et différente d'une concentration à l'autre, ce qui n'est pas le cas de la contrainte.

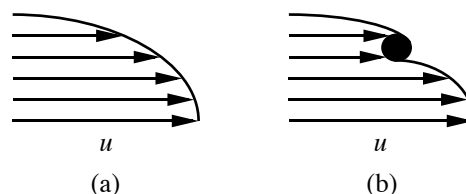


Figure 12.2. Champs de vitesse d'écoulement (a) pour une solution homogène et (b) pour une suspension.

Le deuxième effet est la formation d'un réseau qui se crée dans des suspensions non-inertes ou des suspensions inertes fortement concentrées comme décrit à la Figure 12.3. Ce réseau, dans



le cas non-inerte, est constitué de liens déformables qui lient les particules entre elles. Dans le cas de suspensions inertes, le contact entre les particules présentant un coefficient de frottement élevé provoque la formation d'un réseau.

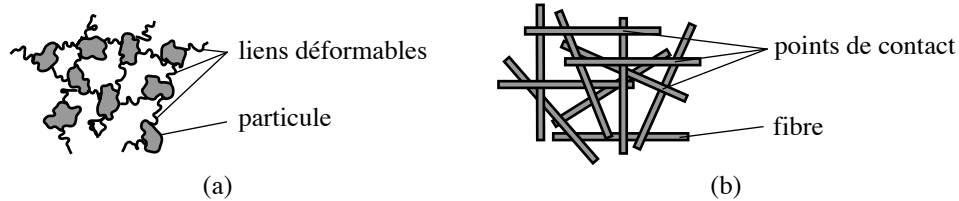


Figure 12.3. Représentation schématique d'une suspension (a) non-inerte et (b) inerte formant un réseau.

Les caractéristiques qui déterminent le comportement de la suspension sont :

- sa stabilité dans le temps,
- la géométrie des agrégats et flocons,
- les propriétés des liens entre les particules,
- la stœchiométrie, la géométrie des phases, miscibilité (émulsions, mélange de polymères),
- la solvation/l'adsorption.

## 12.2 INTERACTIONS ET STABILITE DES SUSPENSIONS

Les particules en suspension interagissent par le biais de forces de natures différentes. Les interactions qui apparaissent entre les particules d'une suspension concentrée sont diverses. On distingue les *forces de répulsion* comme les *interactions de sphères dures*, correspondant au fait que les particules solides ne peuvent pas s'interpénétrer, la *répulsion électrostatique*, les *forces attractives de Van der Waals* ainsi que les *interactions browniennes* résultant de l'agitation thermique et finalement les *interactions hydrodynamiques*. Du fait de ces forces, les particules se distribuent localement et collectivement selon une configuration instantanée particulière. Le comportement macroscopique de la suspension dépend par conséquent des variations des intensités des forces entre particules qui évoluent avec la configuration moyenne au cours de l'écoulement.

### 12.2.1 Forces de répulsion

#### *Les interactions de sphères dures*

Les interactions de sphères dures sont des forces répulsives à courte portée qu'exercent les particules solides les unes sur les autres du fait de leur impénétrabilité. On représente ces forces avec un modèle de « cœurs durs » pour lequel l'énergie potentielle est nulle si la distance bord à bord est positive et infinie si cette distance est nulle.

#### *La force de répulsion stérique*

La force de répulsion stérique est due à l'adsorption de molécules à la surface des particules. Ces molécules peuvent être des polymères ou des agents tensioactifs. La répulsion a deux causes :

- la pression osmotique liée à la présence d'une concentration élevée d'éléments de la chaîne du polymère adsorbé dans la région de recouvrement entre deux particules assez proches.
- la diminution du nombre de configurations possibles des molécules adsorbées dans la région de recouvrement.

#### *Les forces de déplétion*

Les forces de déplétion se rencontrent dans le cas de suspensions contenant surtout des particules de tailles différentes. Considérons le cas de la suspension bidisperse où les grosses particules sont entourées par d'autres particules bien plus petites et plus nombreuses qu'elles comme montré à la Figure 12.4. Tant que les grosses particules restent isolées, elles sont bombardées par les petites sur toute leur surface. La pression osmotique exercée par les petites particules est partout égale sur la surface des grosses.

Si deux grosses particules s'approchent d'une distance inférieure au diamètre des petites, ces dernières exercent une pression à la surface des grosses sauf dans la région où elles ne peuvent pas passer. Il en résulte un défaut de pression dans la région vide de petites particules, ce qui tend à rapprocher encore plus les grosses et il en résulte une force attractive entre elles. Le même phénomène se produit lorsqu'une grosse particule vient assez près d'une paroi.

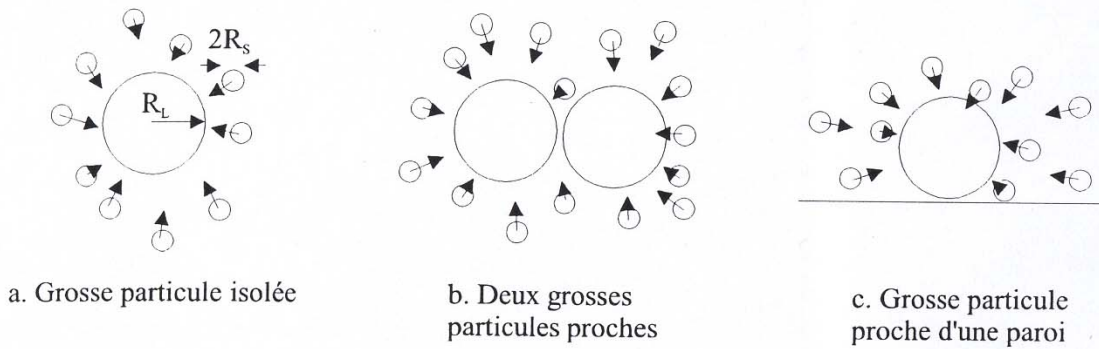


Figure 12.4. Représentation des forces de déplétion dans le cas d'une suspension bidisperse.

### 12.2.2 Le mouvement brownien

Les molécules du fluide suspendant sont animées d'un mouvement dû à l'agitation thermique. Ces molécules échangent de l'impulsion avec les particules solides au cours des collisions qu'elles subissent. La quantité d'impulsion échangée par unité de temps c'est à dire la force que le fluide exerce, par l'intermédiaire de chocs, sur la particule est une quantité qui fluctue au cours du temps mais possède une valeur moyenne nulle.

Dans le cas où les particules en suspension sont suffisamment petites ( $d < 1\mu\text{m}$ ) ces collisions peuvent entraîner une série d'accélération et donc une série de déplacements aléatoires des particules. Ce mouvement tend à éloigner les particules solides en suspension de leurs positions initiales même en absence d'écoulement macroscopique.

Le mouvement brownien est caractérisé par un coefficient de diffusion  $D$ , introduit par Einstein en 1905, sous la forme du rapport entre l'énergie d'agitation thermique  $kT$  de la suspension et d'un facteur de traînée visqueuse (Stokes) qui dépend de la taille des particules,  $a$ , ainsi que la viscosité  $\eta$  du fluide :

$$D = \frac{kT}{6\pi\eta a} \quad (12.1)$$

Ainsi le coefficient de diffusion augmente quand la taille des particules diminue. Cette approche est pertinente pour décrire l'homogénéisation au cours du temps des suspensions colloïdales

### 12.2.3 Les interactions de van der Waals

Les forces de van der Waals résultent des fluctuations thermodynamiques du champ électromagnétique à l'intérieur et autour des particules. En effet, les atomes induisent les uns sur les autres des moments dipolaires et les moments induits engendrent une interaction attractive entre les atomes. La portée de cette force attractive ne dépasse pas quelques dizaines de nanomètres. En première approximation et pour deux sphères de diamètre  $d$  et séparées d'une distance  $h$  cette force s'écrit :

$$F_{\text{vw}} = -A \frac{d}{24h^2} \quad (12.2)$$

où  $A$  est la constante de Hamaker relative aux deux milieux (particules et fluide) et varie entre  $10^{-30}$  J et  $10^{-18}$  J, de l'ordre de l'énergie thermique à la température ambiante  $kT$ .

### 12.2.4 Les interactions hydrodynamiques

L'effet de ce type d'interactions est fondamental puisqu'il provient du simple fait de la présence des particules au sein de la suspension. Sous écoulement, chaque particule induit des perturbations du champ de vitesse qui sont d'autant plus importantes que l'on se trouve près d'elle. Ainsi le fluide en écoulement exerce une force sur chaque particule compte tenu de la présence des autres. Ces interactions sont complexes et dépendent du type d'écoulement imposé, de la nature du fluide suspendant ainsi que de la distribution spatiale des particules. Les forces hydrodynamiques sont des forces de dissipation visqueuse. Nous précisons par la suite l'importance de ces interactions par rapport aux interactions browniennes et colloïdales dans nos expériences.

#### *Comparaison avec les interactions browniennes*

Le nombre adimensionnel (Cf. Chapitre 1) de Péclet compare les effets de l'énergie liée au mouvement de convection caractéristique d'une particule dans le fluide à ceux de son énergie thermique :

$$Pe = \frac{\text{convection}}{\text{diffusion}} = \frac{6\pi\eta a \cdot \dot{\gamma} a \cdot a}{kT} = \frac{6\pi\eta \dot{\gamma} a^3}{kT} \quad (12.3)$$

L'énergie de convection d'une particule de taille  $a$  soumise à une force hydrodynamique est le produit de la force  $F = 6\pi\eta a v$  où  $v = \dot{\gamma} a$  et de la taille de la particule. Une valeur de  $Pe$  élevée indique que le transport de particules par diffusion brownienne est négligeable par rapport au transport par convection, comme schématisé à la Figure 12.5.

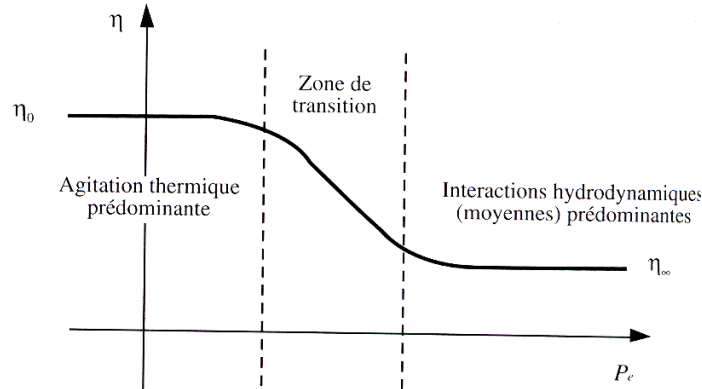


Figure 12.5. Domaines de prédominance entre interactions de type Brownien (agitation thermique) et hydrodynamiques, en fonction du nombre de Peclet.

### Comparaison avec les forces de van der Waals :

Le rapport des interactions hydrodynamiques et de Van der Waals fait apparaître un nombre sans dimension  $N_{H/vdW}$ , qui mesure l'importance relative de ces deux effets :

$$N_{H/vdW} = \frac{\text{hydrodynamique}}{\text{van der Waals}} = \left( \frac{6\pi\eta a \dot{\gamma} a}{A d} 24h^2 \right) \sim \frac{\eta \dot{\gamma} a^3}{A} \frac{h^2}{ad} \quad (12.4)$$

où  $A$  est la constante de Hamacker dont la valeur est de l'ordre de l'agitation thermique  $kT$ . Au cours d'une collision la distance minimale de séparation entre deux particules est donnée par la taille des aspérités qui se trouvent à leur surface.

### 12.2.5 Les forces électrostatiques

Lorsque des particules sont mises en suspension dans un fluide qui comporte des ions, une charge électrique peut apparaître à la surface des particules. Cette charge peut être présente

avant la mise en suspension des particules dans le liquide ou bien apparaître après la mise en suspension. En effet, il peut y avoir soit dissociation de groupes de surface par le fluide, soit adsorption d'ions de la solution dans le cas d'une solution ionique.

### *La double couche*

Une particule chargée tend à s'entourer d'ions de signes opposés comme schématisé à la Figure 12.6. Ces ions diffusent sous l'effet de l'agitation thermique, de sorte qu'il existe autour de la particule une distance de non-neutralité. L'organisation spatiale des charges électriques sur la particule chargée est appelée double couche électrique. L'adsorption d'ions ou leur concentration accrue près d'une surface crée un potentiel électrique  $\Psi_i$  qui forme une couche électronique diffuse. Un tel potentiel est également décrit à la Figure 12.6.

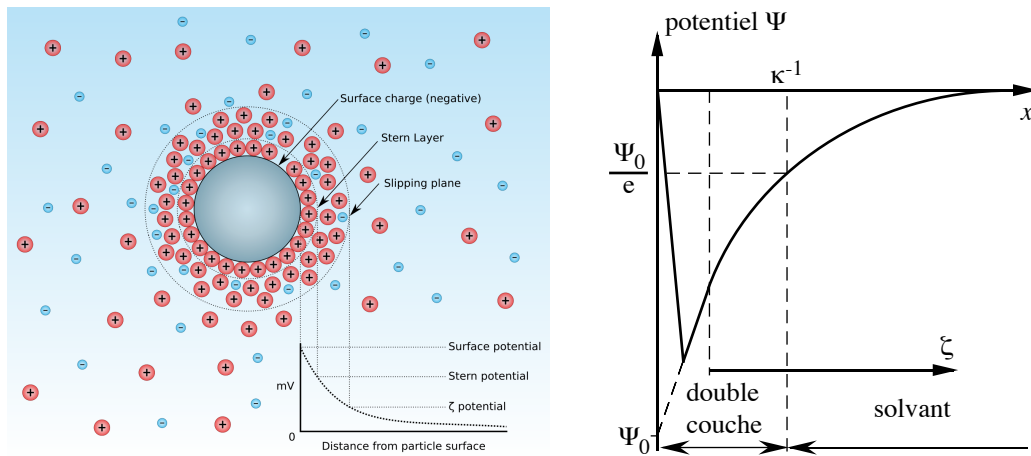


Figure 12.6. Diagramme montrant la concentration ionique autour d'une particule dans un fluide (à gauche, source Wikipedia) et évolution du potentiel électrique en fonction de la distance de la surface d'une particule chargée (à droite).

Gouy et Chapman ont proposé, grâce à certaines approximations simplificatrices, une expression du potentiel électrostatique  $\Psi$  autour d'une sphère chargée, qui s'écrit :

$$\Psi = \Psi_0 e^{-\kappa x} \quad (12.5)$$

où  $\kappa^{-1} = \sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon k T}{2 n e^2 z^2}}$  est la longueur de Debye, avec  $\epsilon$  la constante diélectrique du liquide,  $\epsilon_0$  la permittivité du vide,  $n$  la concentration en ions dans le liquide,  $e$  la charge unitaire et  $z$  la valence

des ions. Cette longueur nous donne la portée de la répulsion électrostatique. Elle délimite un volume autour de la particule au-delà duquel les autres particules n'interagissent pas de manière électrostatique avec la particule considérée.

Notons que dans le cas d'une suspension colloïdale le nombre de Péclet s'écrit comme suit :

$$Pe_c = \frac{\Psi}{kT} \quad (12.6)$$

Considérons maintenant non plus une mais deux particules séparées d'une distance  $h$ . Lorsque ces particules s'approchent l'une de l'autre, une force répulsive se développe. Le calcul de cette force est complexe. Toutefois, si la couche de Debye est petite devant le rayon  $a$  des particules ( $\kappa a \gg 1$ ) et si la distance  $h$  les séparant est grande ( $\kappa h \gg 1$ ), les interactions électrostatiques décroissent de façon exponentielle :

$$F_{el} \approx \epsilon \Psi^2 \left( \frac{a}{r} \right)^2 e^{-\kappa h} \quad (12.7)$$

Pendant un écoulement, un plan de glissement hydrodynamique se forme entre la première couche adsorbée et les suivantes. Le potentiel à ce plan est appelé potentiel zêta  $\zeta$  ou potentiel électrocinétique et se calcule avec la relation :

$$\zeta = \frac{F_H \eta v_e}{\epsilon_r \epsilon_0 E} \quad (12.8)$$

où  $\eta$  est la viscosité de l'électrolyte,  $v_e$  est la vitesse d'électrophorèse (déplacement de la particule chargée sous champ électrique),  $E$  le champ électrique imposé et  $F_H$  la constante d'Henry. Le potentiel zêta  $\zeta$  est un indice du gradient de potentiel électrique. L'interaction entre deux doubles couches détermine l'attraction ou la répulsion entre deux particules. La Figure 12.7 représente le potentiel zêta ainsi que la viscosité en fonction de la fraction volumique des ions. Une suspension est généralement stable pour des potentiels zêta supérieurs à 25 mV, et à l'inverse aura tendance à coaguler ou flocculer pour des valeurs inférieures à 10 mV. Notons que l'électrophorèse est une méthode d'analyse basée sur le fait que les seules forces subies par le liquide en mouvement sont la force électrostatique directe et le frottement visqueux.

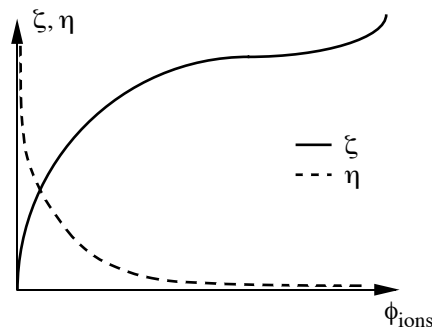


Figure 12.7. Evolution de la viscosité et du potentiel zêta en fonction de la fraction volumique des ions.

### 12.2.6 Coagulation et floculation

La coagulation est la déstabilisation d'une suspension colloïdale par l'utilisation d'un sel ou par une modification du pH. La floculation est la déstabilisation d'une suspension colloïdale par l'utilisation d'un polymère ou d'un agent tensioactif. La stabilité d'une suspension colloïdale est contrôlée par :

- l'encombrement stérique,
- la valence des ions,
- la diélectricité du solvant,
- la présence ou l'absence de particules hydrophobes,
- l'épaisseur de la couche limite donc par  $\kappa^{-1}$ ,
- le potentiel zêta  $\zeta$ ,
- le pH du solvant,
- la température.

Les systèmes floculés ont un comportement non-newtonien dicté en grande partie par les changements du réseau formé par les particules lors d'une déformation. Leur caractérisation doit se baser sur une analyse des composants et de leur état de dispersion ou d'agrégation. La Figure 13.2 regroupe les trois types d'interactions propres aux colloïdes : le recouvrement des doubles couches, l'attraction polaire et l'attraction hydrophobe.



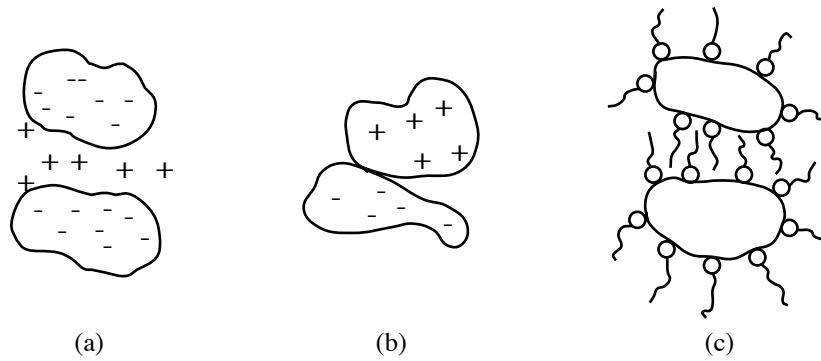


Figure 12.8. Schéma de trois cas d'interactions : (a) le recouvrement des doubles couches, (b) l'attraction polaire et (c) l'attraction hydrophobe.

### 12.2.7 Bilan des forces d'interaction et théorie DLVO

L'une des plus importantes propriétés physiques des suspensions est leur stabilité dans le temps, liée à la tendance des particules à former des agrégats par des processus de coagulation ou de floculation. Ces agrégats ont une masse plus élevée que les particules individuelles qui les constituent et ont tendance à sédimenter.

La stabilité d'une suspension dépend de la somme de l'interaction des forces répulsives (électrostatique, stérique et de déplétion) et des forces attractives (de Van der Waals, polaire) entre ses particules. La Figure 12.9 représente les trois potentiels d'interaction présents dans les suspensions colloïdales ainsi que leur somme. Lorsqu'on fait le bilan global des interactions entre deux particules on obtient une énergie potentielle d'interaction qui peut avoir en fonction de la distance entre les particules des allures variées et ce selon l'importance relative des diverses composantes de cette énergie. Quand la distance entre deux particules diminue, l'énergie potentielle augmente considérablement. La suspension reste stable tant qu'on ne fournit pas aux particules une énergie (mécanique, thermique ...) supérieure à la barrière de potentiel.

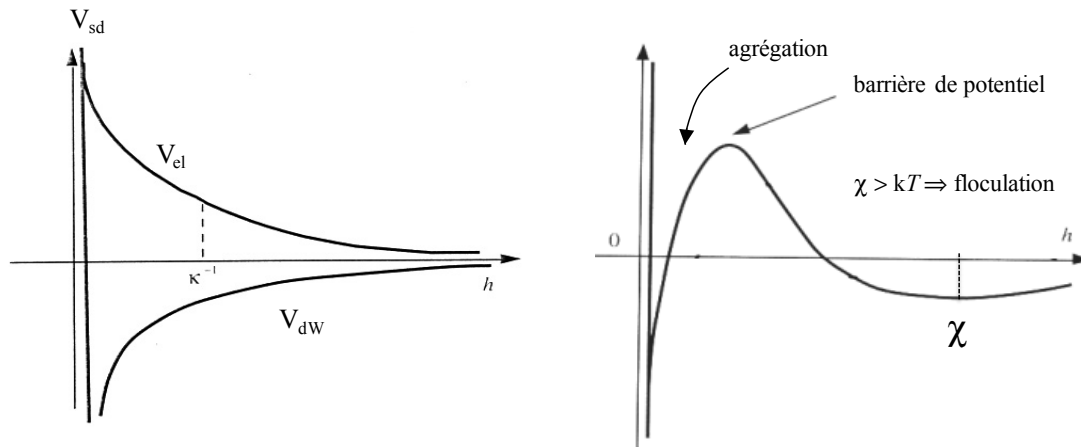


Figure 12.9. Bilan des interactions entre particules dans une suspension en fonction de la distance entre particules. On note  $V_{dw}$  le potentiel attractif de van der Waals,  $V_{el}$  le potentiel répulsif électrostatique et  $V_{sd}$  le potentiel de répulsion de sphères dures. Le graphe de gauche montre les interactions fondamentales et celui de droite montre leur somme.

La théorie DLVO (Derjaguin, Landau, Verwey et Overbeek) décrit l'énergie potentielle d'interaction entre deux particules en fonction de leur distance. Celle-ci diminue rapidement et passe par un minimum qui correspond au contact entre les particules. Il y a alors **agrégation** et formation d'amas de particules. Si l'agitation thermique de la suspension ou les forces répulsives sont suffisantes le phénomène d'agrégation est négligeable et la suspension reste stable. Pour une distance plus grande, les particules peuvent aussi former des doublets très faiblement liés (minimum secondaire). Si l'énergie potentielle qui correspond à ce minimum secondaire est supérieure à  $kT$ , il y a alors **floculation**. Dans le cas où l'énergie thermique moyenne  $kT$  est inférieure à la barrière de potentiel, ce mouvement aura pour effet de ramener les particules dans des distributions spatiales plutôt isotropes.

### 12.2.8 Synthèse phénoménologique des écoulements de suspensions

La Figure 12.10 synthétise la richesse de comportements rhéologiques de suspensions de particules solides dans un fluide, en fonction de la concentration des particules et du taux de cisaillement appliqué à la suspension. Les transitions entre les différents régimes sont décrits avec les nombres adimensionnels. Le nombre de Péclet,  $Pe$ , correspond à la transition entre les régimes Brownien et hydrodynamique visqueux. Le nombre de répulsion  $Nr$  (rapport entre les interactions de Van der Waals et l'agitation thermique) correspond à la transition entre les régimes Brownien et colloïdal, lorsque la concentration de particules augmente (e.g., la distance entre particules diminue). Les autres nombres adimensionnels montrés sur la figure sont le nombre  $\Gamma$ , rapport des interactions visqueuses et colloïdales, le nombre de Reynolds  $Re$  qui

décrit la transition vers la turbulence, le nombre de Leighton  $Le$  pour la transition entre régimes visqueux et de frottement, et le nombre de Bagnold  $Ba$  pour la transition entre régimes visqueux et de collision. La concentration  $\phi_m$  correspond à la concentration maximale dans le cas d'une suspension aléatoire ( $\phi_m \approx 0.635$  pour des particules sphériques monodisperses) et  $\phi_c$  correspond à la concentration minimale pour que des particules forment un réseau ( $\phi_c \approx 0.5$  pour des particules sphériques monodisperses).

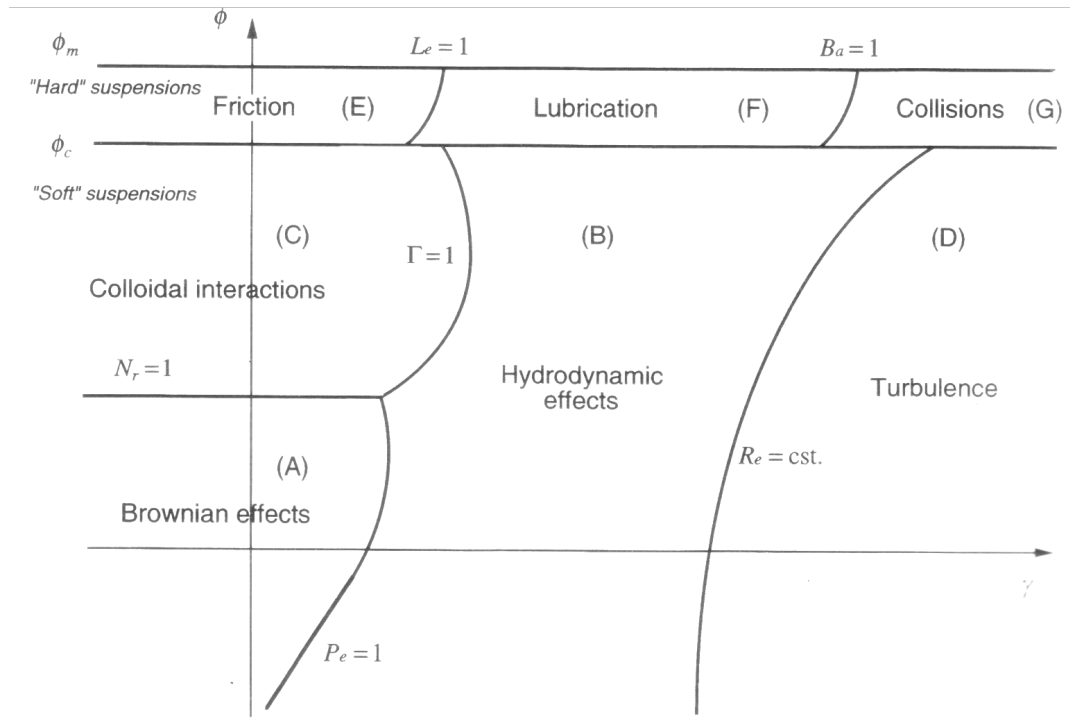


Figure 12.10. Diagramme synthétique des régimes d'écoulement de suspensions de particules solides dans un fluide en fonction de la concentration de particules et de la vitesse de cisaillement appliquée à la suspension (D'après C. Ancey, EPFL).

### 12.3 EMULSIONS

Nous terminons ce Chapitre en décrivant les émulsions qui sont type particulier mais assez courant de suspensions colloïdales. Une émulsion est définie comme étant une préparation obtenue par la division d'un liquide en gouttelettes au sein d'un autre liquide avec lequel il ne peut pas se mélanger et incluse par exemple la mayonnaise et des crèmes cosmétiques. Une émulsion se compose donc de deux phases liquides non-miscibles.

### 12.3.1. Stabilité des émulsions

La stabilité d'une émulsion est créée par la formation d'un film entre les deux phases au moyen d'un surfactant (par exemple un lipide polaire) qui réduit la tension superficielle. Dans le cas d'une émulsion huile-eau, les molécules de surfactant sont constituées d'une partie hydrophobe et d'une partie hydrophile. L'énergie des interfaces détermine la morphologie de l'émulsion. La viscosité dépend de la géométrie et de la concentration des phases. L'interface des deux phases de l'émulsion huile - eau est représentée schématiquement sur la Figure 12.12.

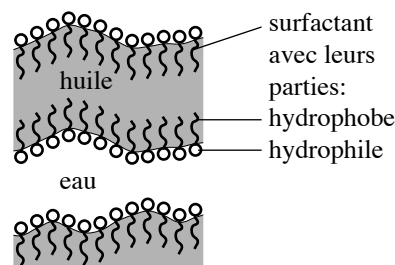


Figure 12.12. Représentation schématique des interfaces d'une émulsion eau-huile.

Les deux phases non-miscibles sont séparées par un film de cristal liquide lamellaire consistant en une couche simple ou double de surfactant. La taille des particules est donnée par la tension interfaciale entre les deux phases, les propriétés rhéologiques des interfaces et l'histoire des écoulements subis par l'émulsion. Des exemples d'émulsions sont :

- la mayonnaise (eau - huile),
- le lait (eau - graisse),
- les crèmes cosmétiques
- les mélanges de polymères,
- les mousses (la phase dispersée est sous forme gazeuse),

### 12.3.2 Inversion de phase

Bien que le type de composants soit le même, la viscosité d'une émulsion est complètement modifiée par le changement de la concentration des composants. En effet, en ajoutant suffisamment du composant de la phase dispersée, celle-ci peut devenir la phase continue. Ce phénomène est appelé inversion de phase.

L'inversion de phase est également contrôlée par le type et la concentration de surfactant ainsi que par la température. Cette inversion peut être illustrée par un diagramme de phase comme le montre la Figure 12.12.

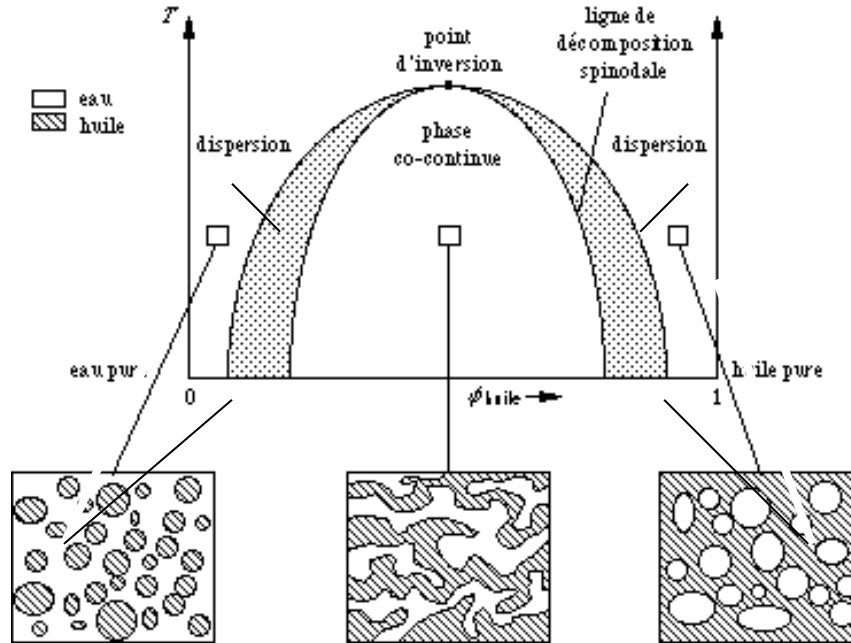


Figure 12.12. Diagramme de phase d'une émulsion eau-huile.

### 12.3.3 Exemple : la margarine

La margarine est une émulsion d'eau dans l'huile. La phase dispersée est constituée d'eau, de sel et d'agents conservateurs. Dans quelques cas, des protéines du lait sont utilisées. La phase continue est composée d'huile végétale hydrogénée ou occasionnellement de graisse animale. La lécithine et le monoglycéride sont généralement ajoutés dans la phase huileuse. La margarine contient entre 40% et 80% d'huile.

La margarine est formulée de manière à posséder des bonnes propriétés sensorielles, comme sa fusion dans la bouche ou sa capacité à être épanchée. Elle doit aussi rester semblable au beurre. En limitant la fraction de graisse dans la margarine, il est difficile de formuler un produit semblable au beurre. En effet, l'émulsion eau-huile devient plus difficilement stable et il existe un risque d'inversion de phase.

Les essais rhéologiques permettent de quantifier la texture de la margarine et sa capacité à être tartinée afin de la comparer au beurre. Le problème principal lors des mesures rhéologiques est le glissement aux parois du rhéomètre, ce qui fausse les valeurs réelles de la viscosité. En général, la margarine suit un modèle rhéologique appelé modèle de Bird-Leider :

$$\tau = -m(-\dot{\gamma})^n \left[ 1 + (b\dot{\gamma}t - 1) \exp \left\{ -\frac{t}{an\lambda} \right\} \right] \quad (12.9)$$

où  $m$  et  $n$  sont les paramètres de la loi de puissance,  $t$  le temps,  $\lambda$  une constante de temps et  $a$  et  $b$  des constantes ajustables.

---

## 13 RHEOLOGIE DES SUSPENSIONS

La présence de particules solides dans le fluide a fondamentalement pour conséquence d'augmenter la viscosité apparente. Les diverses forces d'interactions interparticulaires induisent un accroissement de la dissipation d'énergie au sein de la suspension en écoulement. L'accroissement de la viscosité de la suspension est alors associé à l'énergie qu'il faut dépenser pour déplacer les particules les unes par rapport aux autres. Dans ce qui suit, nous allons examiner l'influence de la fraction volumique des particules ainsi que celle de leur configuration et de leur distribution granulométrique sur la viscosité apparente de la suspension.

### 13.1 SUSPENSIONS DE PARTICULES SPHERIQUES

#### 13.1.1 Suspensions diluées

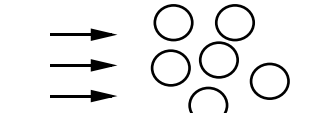
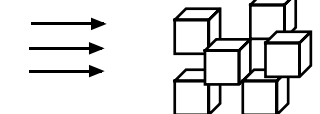
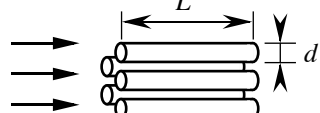
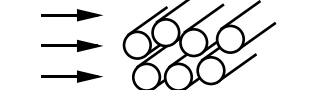
Dans le cas d'une suspension diluée, les particules sont suffisamment éloignées les unes des autres pour qu'on puisse les considérer comme étant indépendantes et négliger ainsi les interactions hydrodynamiques entre les particules. Dans ces conditions, on peut facilement estimer le champ des vitesses du fluide autour de chaque particule. En supposant un non glissement du fluide à la surface des sphères, l'expression de la viscosité  $\eta$  est donnée par la formule d'Einstein :

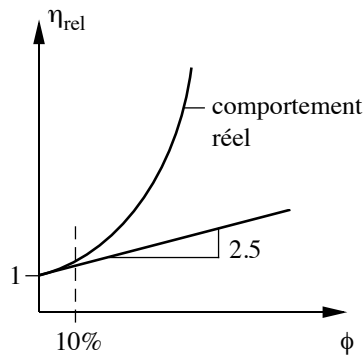
$$\eta = \eta_0 (1 + k_e \phi) \quad (13.1)$$

où  $\eta_0$  est la viscosité du fluide,  $\phi$  la fraction volumique de particules et  $k_e$  un coefficient, égal à 2.5 dans le cas de sphères. Les valeurs de  $k_e$  pour d'autres géométries sont répertoriées dans le Tableau 13.1. La relation d'Einstein est basée sur les équations cinématiques d'un flux laminaire dans un réseau très dilué de particules sphériques. La viscosité relative en fonction de la fraction volumique des particules et le comportement réel sont reportés à la Figure 13.1a. La Figure 13.1b montre l'évolution du coefficient d'Einstein ( $k_e$ ) en fonction de la concentration.

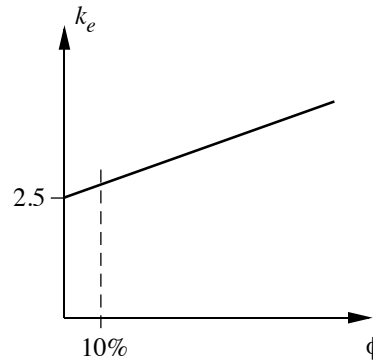
L'équation 13.1 donne de bonnes prédictions pour les expériences menées avec des suspensions diluées, de concentration inférieure à 2%. En revanche les courbes expérimentales s'écartent de la théorie dès que la concentration augmente.

Tableau 13.1. Valeur du coefficient d'Einstein  $k_e$  en fonction de deux géométries de particules et de la direction du flux par rapport aux particules.

Type de particules	Valeur de $k_e$	Schéma du fluide et particules
- sphériques	2.5	
- cubiques	3.1	
-réseau de fibres (flux parallèle)	$2L/d$	
- réseau de fibres (flux transversal)	1.5	



(a)



(b)

Figure 13.1. Evolution de la viscosité relative  $\eta/\eta_0$  (a) et du coefficient d'Einstein (b) en fonction de la fraction volumique de particules.

### 13.1.2. Suspensions semi-concentrées

La Figure 13.1a montre que le comportement réel dévie rapidement de l'équation donnée. Il est possible d'augmenter la plage de validité en ajoutant des termes d'ordre supérieur. La relation d'Einstein prend alors la forme d'un développement viriel :

$$\eta_{\text{rel}} = 1 + 2.5\phi + k_H\phi^2 + \dots \quad (13.2)$$

où  $k_H$  est appelé coefficient de Huggins. L'ordre de l'équation se réduit si on réarrange les termes sous la forme d'une viscosité réduite  $\eta_{\text{red}}$  :

$$\eta_{\text{red}} = \frac{\eta_{\text{rel}} - 1}{\phi} = 2.5 + k_H\phi + \dots \quad (13.3)$$



La Figure 13.1b illustre ce concept, et la pente de la courbe correspond au terme  $k_H$ . De plus, on a la relation suivante :

$$\eta_{\text{red}}(\phi \rightarrow 0) = k_e = [\eta] \quad (13.4)$$

Par la suite, on utilisera seulement la viscosité intrinsèque  $[\eta]$  pour représenter cette variable. Un calcul tenant compte des interactions de paires dans différents types d'écoulements a été effectué par Batchelor et Green en 1972. Ils ont trouvé pour des suspensions macroscopiques à fort nombre de Peclet une valeur de  $k_H$  égale à 7.6 pour un écoulement élongationnel, et 5.2 pour un cisaillement simple. L'équation (13.2) donne de bonnes prédictions pour des suspensions concentrées jusqu'à 10%. Au-delà de cette concentration, la viscosité dépend fortement de la fraction volumique des particules.

L'équation de Mooney décrit également le comportement de suspensions semi-concentrées en faisant intervenir une fraction maximale de compactage  $\phi_{\text{max}}$ , définie à la section suivante :

$$\ln \left\{ \frac{\eta}{\eta_0} \right\} = \frac{k_e \phi}{1 - \phi/\phi_{\text{max}}} \quad (13.5)$$

La Figure 13.2 illustre la dépendance de la viscosité d'une suspension de particules sphériques monodisperses en fonction de la fraction volumique des particules. Cette dépendance est fortement non linéaire, au-delà de  $\phi \approx 0.4$  une légère variation de la fraction volumique induit une augmentation significative de la viscosité.

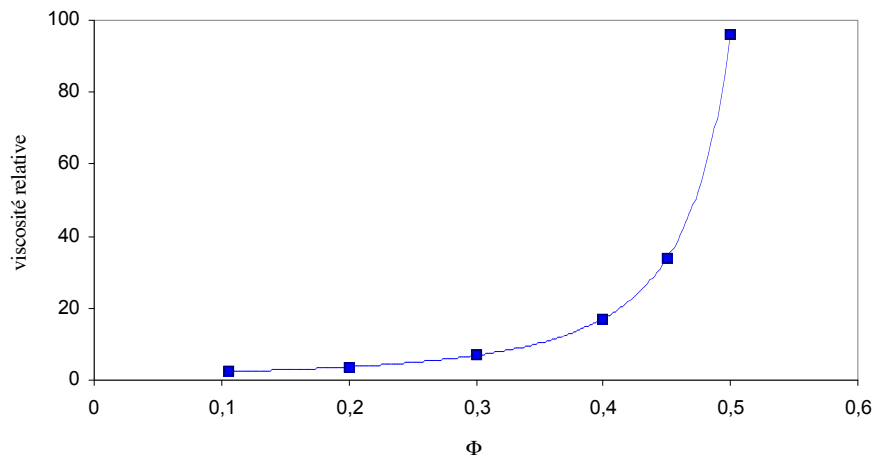


Figure 13.2. Viscosité relative d'une suspension en fonction de la fraction volumique de particules.

### 13.1.3. Suspensions concentrées

D'après les paragraphes précédents, on constate qu'au fur et à mesure que la fraction volumique des particules augmente, la loi proposée donne de moins en moins satisfaction. L'interaction entre les particules cause une élévation rapide de la viscosité. Si les particules sphériques monodisperses de la solution sont concentrées dans le solvant newtonien, il faut affiner les relations précédentes.

Une autre approche souvent utilisée par les rhéologues est l'approche de type milieu effectif. Les suspensions sont traitées comme des milieux continus : les particules et le fluide sont considérés comme un milieu homogène continu de viscosité  $\eta$  qui ne dépend que de la concentration en particules et de la viscosité du fluide. De là, si on ajoute une faible fraction de particules  $d\phi \ll 1$ , on peut supposer que l'on aura une variation linéaire de la viscosité en fonction de la concentration :

$$\eta(\phi + d\phi) \approx \eta(\phi)(1 + [\eta]d\phi) \quad (13.6)$$

avec  $[\eta]$  la viscosité intrinsèque locale de la suspension définie par :

$$[\eta] = \lim_{\phi' \rightarrow \phi} \frac{\eta(\phi') - \eta(\phi)}{\eta_0 \phi} \quad (13.7)$$

Il faut cependant noter que le volume accessible aux particules ajoutées n'est pas le volume total du liquide mais une fraction de ce volume qu'on note  $1 - \alpha\phi$  où  $\alpha$  est un facteur qui tient compte de l'encombrement stérique. On peut alors écrire :

$$\eta(\phi + d\phi) = \eta(\phi) \left( 1 + \frac{[\eta]d\phi}{1 - \alpha\phi} \right) \quad (13.8)$$

En intégrant l'équation précédente on obtient l'expression de Krieger et Dougherty :

$$\eta = \eta_0 (1 - \alpha\phi)^{-[\eta]/\alpha} \quad (13.9)$$

où  $\alpha^1$  est appelé la concentration critique pour laquelle la viscosité diverge. En effectuant un développement limité de premier ordre en  $\phi$ , on retrouve l'équation d'Einstein pour  $[\eta] = 2.5$ . Par ailleurs si on assimile la concentration critique de divergence à la concentration maximale de compactage  $\phi_{\max}$ , l'équation précédente devient :

$$\eta_{\text{rel}} = \left(1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}}\right)^{-2.5\phi_{\max}} \quad (13.10)$$

La concentration maximale  $\phi_{\max}$  dépend de la nature de l'écoulement et de la distribution spatiale et granulométrique des particules. Dans le cas d'une suspension de sphères monodisperses,  $\phi_{\max}$  prend différentes valeurs suivant l'arrangement des sphères. Ainsi on distingue deux sortes d'arrangements : aléatoire ou régulier. Le premier peut être lâche ( $\phi_{\max} = 0.56$ ) ou dense ( $\phi_{\max} = 0.64$ ). Quant à l'arrangement régulier, il se fait suivant différents réseaux auxquels correspondent différentes fractions de compactage comme montré à la Figure 13.3. On trouve 0.524 pour un réseau cubique simple (a), 0.605 pour un empilement carré mono-décalé (b) ou triangulaire simple (d), 0.698 pour un empilement carré bi-décalé (c) ou triangulaire mono-décalé (e) et 0.74 pour un empilement triangulaire bi-décalé (f). Cette formule est aussi applicable pour le cas de suspensions bidisperses ou polydisperses en adaptant la valeur de l'exposant et de la compacité maximale au système étudié.

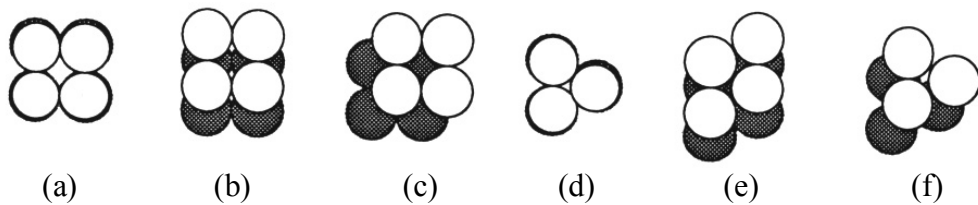


Figure 13.3. Types d'empilements compacts réguliers.

Certaines valeurs de la fraction volumique à capacité maximale sont présentées dans le Tableau 13.2 en fonction des dimensions et des formes des particules sphériques ou fibreuses.

Tableau 13.2. Valeur de la fraction volumique à capacité maximale pour différentes géométries de particules.

Type de particules	Arrangement des particules dans la suspension	Valeurs de $\phi_{\max}$
Sphères	Compactes	0.64
	Non compactes	0.60
Fibres	1 dimension	0.82
	3 dimensions, $l/d = 2$	0.67
	3 dimensions, $l/d = 4$	0.63
	3 dimensions, $l/d = 8$	0.48
	3 dimensions, $l/d = 16$	0.3
	3 dimensions, $l/d = 50$	0.1

Notons par ailleurs que la distribution des particules au sein d'une suspension soumise à un écoulement ne reste pas homogène au cours du temps. En effet, les inclusions solides ont tendance à s'orienter dans des directions privilégiées si elles ne sont pas sphériques ou à migrer à travers le fluide au cours de l'écoulement et à s'organiser les unes par rapport aux autres. Il en résulte une variation de la viscosité en fonction du temps ou du taux de cisaillement. Ainsi, la suspension peut présenter un caractère thixotrope, rhéofluidifiant ou rhéoépaississant. Une répartition ordonnée des particules au sein du fluide conduit en général à une suspension moins visqueuse qu'une répartition désordonnée.

## 13.2 AGREGATION ET SOLVATATION DES PARTICULES

### 13.2.1 Suspensions concentrées avec formation d'agrégats

Dans le cas où des agrégats se forment on adapte l'équation 13.9 comme suit :

$$\eta_{\text{rel}} = \left( 1 - \frac{\phi}{\phi_{\max}} \right)^{-[\eta]_{\phi_a}^{\phi_{\max}}} \quad (13.11)$$

où  $\phi_a$  représente la fraction volumique des agrégats donnée par :

$$\phi_a = \frac{V_s}{V_s + V_L} \quad (13.12)$$

où  $V_S$  est la somme des volumes des sphères qui forment l'agrégat et  $V_L$  le volume du solvant emprisonné à l'intérieur de l'agrégat. La somme  $V_S + V_L$  correspond au volume total de l'agrégat.

### 13.2.2 Adsorption de solvant à la surface des particules (solvatation)

L'adsorption de solvant à la surface des particules accroît la taille et la concentration effective des particules, comme le montre la Figure 13.4. A noter que l'épaisseur de l'interface peut être comparable à la taille des particules, en particulier quand celle-ci est nanométrique. La figure montre également une particule de forme arbitraire sous forme solvatée. Le solvant piégé à la surface de la particule diminue le volume du liquide libre.

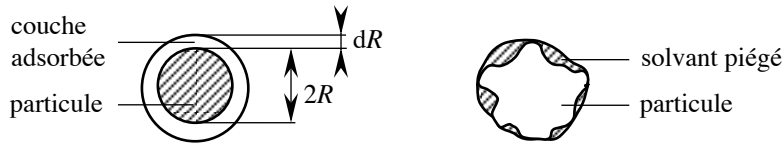


Figure 13.4. Représentation schématique d'une particule sphérique solvatée et physique d'une particule de forme quelconque solvatée.

L'immobilisation du solvant à la surface de la particule conduit à un changement de volume suivant :

$$V_{eff} = V_{part} \left( 1 + \frac{3dR}{R} \right) \quad (13.13)$$

où  $V_{eff}$  est le volume effectif (solvaté) de la particule et  $V_{part}$  son volume non-solvaté. De là, la fraction volumique est modifiée comme suit :

$$\phi_{solv} = \left( 1 + \frac{3dR}{R} \right) \phi_{sec} \quad (13.14)$$

où  $\phi_{solv}$  est la fraction volumique des particules solvatées et  $\phi_{sec}$  la fraction volumique des particules sèches. La viscosité, pour le cas de particules sphériques monodisperses diluées dans un solvant newtonien, est :

$$\eta_{rel} = 1 + 2.5 \left( 1 + \frac{3dR}{R} \right) \phi_{sec} \quad (13.15)$$

### 13.3 SUSPENSIONS DE PARTICULES NON-SPHERIQUES

#### 13.3.1 Influence du rapport de forme

L'effet d'une particule allongée sur la rhéologie d'une suspension dépend de son orientation par rapport à l'écoulement. Une géométrie simplifiée est l'ellipsoïde comme représenté à la Figure 13.5, présentant un rapport des dimensions (ou rapport de forme, *aspect ratio*)  $a_r$  égal à  $a/b$ . Un rapport de forme inférieur à 1 correspond à des particules sous forme de disques alors qu'un rapport de forme supérieur à 1 correspond à des fibres.

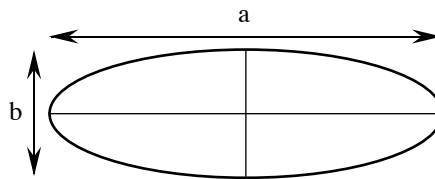


Figure 13.5. Schéma d'une particule ellipsoïdale de grand axe  $a$  et de petit axe  $b$ .

Pour décrire la viscosité d'une suspension de particules non-sphériques présentant une orientation aléatoire on utilise l'équation de Simba :

$$[\eta] = \frac{a_r^2}{15(\ln(2a_r) - \lambda)} + \frac{a_r^2}{5(\ln(2a_r) - \lambda + 1)} + \frac{14}{15} \quad (13.16)$$

où  $\lambda$  est un coefficient qui change selon la forme :

$$\lambda = \frac{a_r^2 - 1}{a_r^2 + 1} \quad (13.17)$$

Pour un ellipsoïde,  $\lambda$  vaut 1.5 et pour un prisme cylindrique (fibre),  $\lambda$  vaut 1.8. La Figure 13.6 montre la forte influence du rapport de forme sur la viscosité intrinsèque  $[\eta]$ , dans le cas où il est soit inférieur à 1 (correspondant à des particules sous forme de disques) soit supérieur à 1 (cas des fibres).

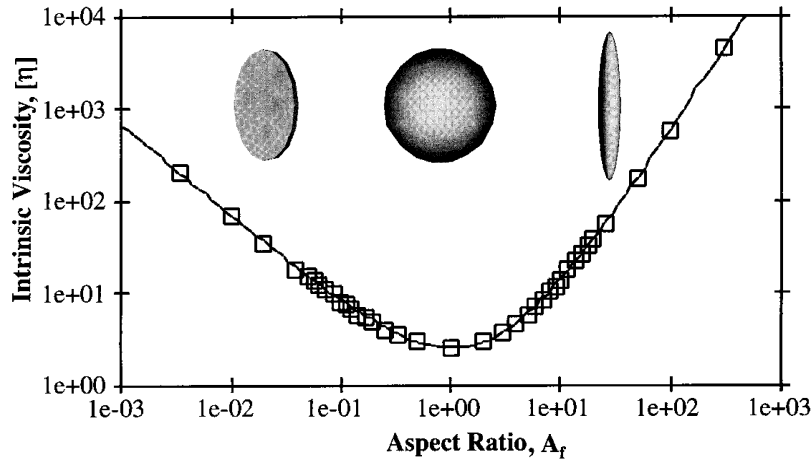


Figure 13.6. Viscosité intrinsèque isotrope de suspensions diluées d'ellipsoïdes de révolution en fonction de leur rapport de forme  $A_f$  ( $A_f < 1$  correspond à des disques,  $A_f > 1$  correspond à des fibres).

La Figure 13.7 montre un exemple de mesures de viscosité de suspensions de PMMA pour différentes tailles des particules. La figure montre la viscosité relative et la viscosité réduite correspondante (équation 13.3). Lorsque la taille moyenne  $\bar{d} = 38\mu\text{m}$  et  $\phi = 0.175$ , on mesure une viscosité intrinsèque de 5.8 (ordonnée à l'origine de la figure 13.5b).

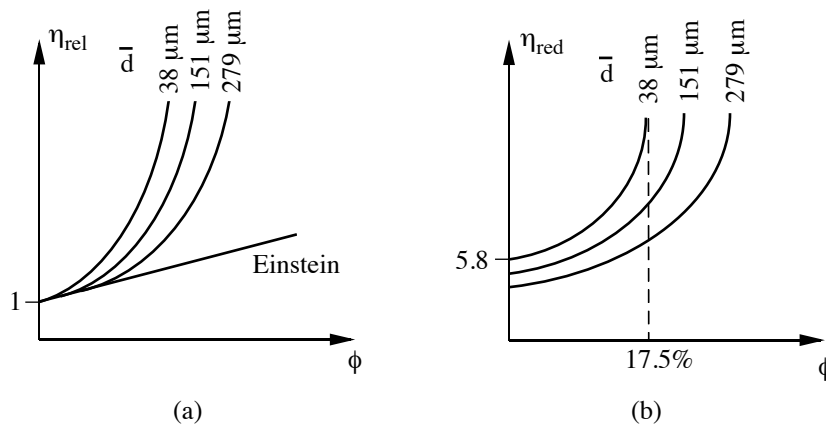


Figure 13.7. Evolution de la viscosité relative (a) et réduite (b) de suspensions de PMMA en fonction de la taille et de la fraction volumique de particules.

Si la suspension est constituée de particules sphériques solvatées, on a :

$$[\eta] = 5.8 = 2.5 [1 + 3(\Delta R/R)] \Rightarrow \Delta R/R = 0.44 \quad (13.18)$$

Si les particules sont elliptiques non-solvatées, le rapport des dimensions est  $a_r \cong 5.0$ .

D'autres facteurs entrent en compte, notamment le facteur de forme et la polydispersité. Ils peuvent être déterminés tous deux sous le microscope. La polydispersité peut également être déterminée par sédimentation.

### 13.3.2 Suspension de fibres

La forme des particules, tout comme leur orientation, est importante pour déterminer leurs interactions. En particulier, la forme des particules détermine leur degré d'interaction, et donc, la transition d'un régime dilué à un régime concentré. Une suspension de sphères à 3% est "diluée". Mais des fibres longues (rapport de forme  $L/d$  élevé) forment déjà un réseau "concentré" à cette fraction volumique. Les Figures 13.8 (a) et (b) illustrent ce principe.

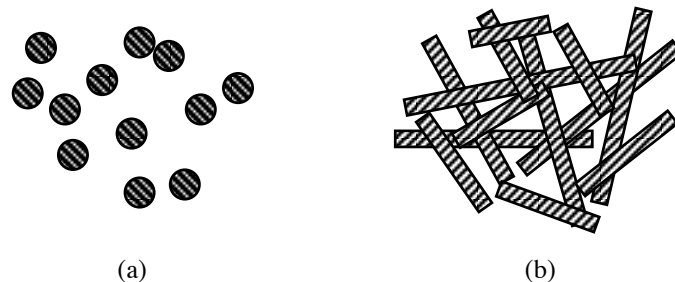


Figure 13.8. Deux suspensions de même fraction volumique : pour (a), il s'agit d'une suspension diluée, tandis que pour (b), elle est concentrée.

Il y a d'autres facteurs de forme, par exemple :

- le rapport de forme,
- la surface, le rapport (surface/volume),
- l'alignement.

### ***Régimes de concentration***

Pour des fibres de longueur  $L$  et de diamètre  $d$  on définit plusieurs régimes de concentration en fonction de la fraction volumique des fibres  $\phi$  comme illustré à la Figure 13.9.



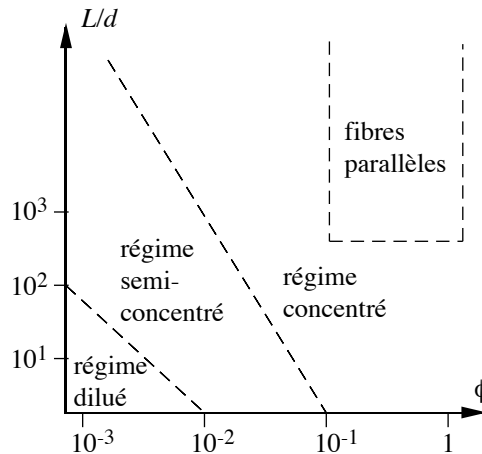


Figure 13.9. Représentation graphique des différents régimes d'interaction en fonction du rapport  $L/d$  et de la concentration de fibres.

Chaque plage est définie mathématiquement comme suit, selon le nombre  $N$  de fibres par unité de volume représentatif :

- Dilué :  $N < 1$  ou  $\phi < \left(\frac{L}{d}\right)^{-2}$ ,
- Semi-concentré :  $1 < N < 60$  ou  $\left(\frac{L}{d}\right)^{-2} < \phi < \left(\frac{L}{d}\right)^{-1}$ ,
- Concentré :  $N > 60$  ou  $\phi > \left(\frac{L}{d}\right)^{-1}$ .

Pour des particules sphériques, on utilise la condition sur  $N$ , et pour les fibres, la condition sur  $L/d$ . Le régime semi-concentré équivaut au régime semi-dilué (terme parfois utilisé). Le volume représentatif est un volume dont la dimension caractéristique est supérieure ou égale à la longueur d'une fibre individuelle.

### ***Orientation des fibres***

La règle de la dynamique d'orientation de fibres en régime dilué a été établie par Jeffery (1922). Il a fait le bilan des forces et des moments exercés par le fluide sur une particule. Il y a deux règles d'orientations décrites à la Figure 13.10 :

- 1) Un écoulement en cisaillement aligne les fibres dans la direction du flux,
- 2) Un écoulement en traction aligne les fibres dans la direction de la traction.

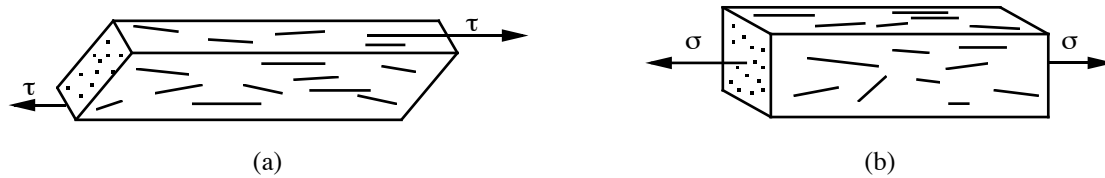


Figure 13.10. Illustration des deux règles d'orientation : (a) en cisaillement, (b) en extension.

Le centre de gravité de la particule se déplace avec le fluide. Il y a un effet couplé, car si le flux influence l'orientation des fibres, l'orientation des fibres influence aussi le flux. Il faut retenir que l'orientation des fibres modifie la viscosité de la manière suivante :

$$\eta_{//} > \eta_{\perp} \quad (13.19)$$

Dans ce paragraphe, seul le cas dilué a été traité. L'étude de suspensions semi-concentrées de fibres est beaucoup plus complexe, car il peut y avoir des collisions entre particules. Le régime concentré est en revanche un peu plus simple à décrire, car la répartition est statistiquement homogène. Nous avons par ailleurs considéré que les fibres étaient rigides. En pratique, des fibres de rigidité finie peuvent se courber, et le traitement de la rhéologie de telles suspensions est particulièrement difficile.

### 13.4 EFFETS DYNAMIQUES ET SEUIL D'ÉCOULEMENT

L'effet de l'ajout de particules sur la viscosité d'un fluide est montré sur la Figure 13.11. L'ajout de particules dans un fluide provoque :

- une augmentation de la viscosité (la courbe de la Figure 13.11 est translatée vers le haut),
- une augmentation du temps de relaxation ( $\lambda$ ) (la courbe de la Figure 13.11 est translatée vers la gauche).
- lorsque la concentration en particules est élevée, une droite de pente -1 se superpose au plateau newtonien aux basses vitesses de cisaillement. Cette droite correspond au comportement du réseau de particules et elle est caractéristique d'un seuil d'écoulement.

#### 13.4.1 Seuil d'écoulement

Le seuil d'écoulement correspond à une certaine contrainte minimale ( $\tau_0$ ) qui doit être exercée pour que l'écoulement ait lieu. Cela veut dire que si on applique une contrainte au-dessous de

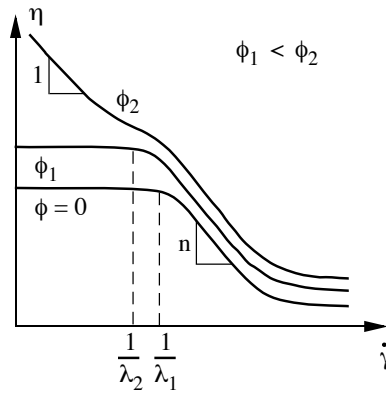


Figure 13.11. Evolution de la courbe de viscosité en fonction de la fraction de particules pour une suspension inerte.

la contrainte critique d'écoulement ( $\tau_0$ ), le matériau ne s'écoule pas, tandis que si on applique une contrainte supérieure au seuil d'écoulement, le matériau va s'écouler comme un fluide. Le seuil d'écoulement est ainsi une propriété du matériau dénotant la transition entre les comportements solide et liquide. Ce seuil illustre le minimum de contrainte de cisaillement correspondant au premier signe d'écoulement. L'origine du seuil d'écoulement provient des interactions entre les particules et de la formation de réseaux (voir paragraphe précédent).

Il est à noter qu'il faut toujours définir un temps d'observation durant lequel on décide si le matériau s'écoule ou non. Il n'est pas exclu qu'un écoulement soit observé pour des temps beaucoup plus longs (phénomène de fluage). Il est donc judicieux de parler de seuil d'écoulement apparent.

Le seuil d'écoulement peut être pris en compte dans la modélisation du comportement des suspensions comme schématisé à la Figure 13.12. Le modèle le plus simple est celui de Bingham (1922) qui fait correspondre à la suspension un solide rigide pour des contraintes inférieures au seuil d'écoulement et un liquide newtonien pour des contraintes supérieures au seuil.

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{si} \quad \tau \leq \tau_0 \quad (13.20a)$$

$$\eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \eta_N \quad \text{si} \quad \tau > \tau_0 \quad (13.20b)$$

où  $\eta_N$  est la viscosité Newtonienne.

Un modèle plus complexe considère, pour des contraintes supérieures au seuil d'écoulement, un comportement liquide régi par une loi de puissance. Il s'agit du modèle de Herschel-Bulkley (1926) :

$$\eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \kappa \dot{\gamma}^{n-1} \quad \text{si} \quad \tau > \tau_0 \quad (13.21)$$

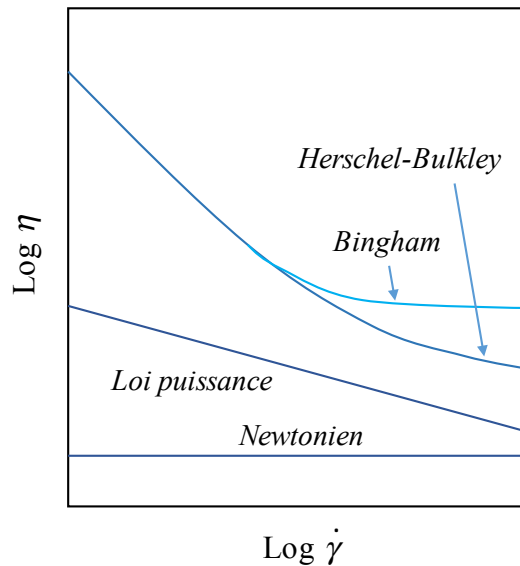


Figure 13.12. Comparaison du modèle Newtonien avec des modèles non-Newtoniens.

Finalement, dans le cas le plus général, on utilise une équation basée sur le modèle de Carreau-Yashuda (voir Chapitre 7) :

$$\eta = \frac{\tau_0}{\dot{\gamma}} + \eta_0 \left[ 1 + (\lambda \dot{\gamma})^{k'} \right]^{\frac{n-1}{k}} \quad \text{si} \quad \tau > \tau_0 \quad (13.22)$$

Il faut remarquer que le comportement solide peut aussi être représenté par un module élastique  $\tau = G\gamma$  si  $\tau \leq \tau_0$ .

### 13.4.2 Modes et exemples de comportement non-newtonien

Une grande diversité de comportements rhéologiques sont observés dans les suspensions. Ces comportements sont classifiés selon des modes, en fonction de la vitesse de cisaillement et du temps comme exposé dans des Chapitres précédents et résumé dans le Tableau 13.3. Plusieurs exemples illustrent ces différents comportements comme suit.

Tableau 13.3. Différents modes de comportement.

Variables augmentées	$\eta$ augmente	$\eta$ baisse
Vitesse de cisaillement	Rhéoépaississant ou Dilatant (sable mouillé, suspension céramique)	Rhéofluidifiant ou Pseudoplastique (boues, peinture)
Temps	Rhéopeptique (latex, sable)	Thixotrope (sables mouvants, ketchup)

### Argiles

Les argiles sont des minéraux constitués par l'empilement de feuillets orthosilicates liés par des liaisons ioniques. Ces matériaux sont hydrophiles et les feuillets peuvent se disperser dans l'eau, donnant lieu à des suspensions instables, thixotropes, dont le comportement réversible est illustré à la Figure 13.13.

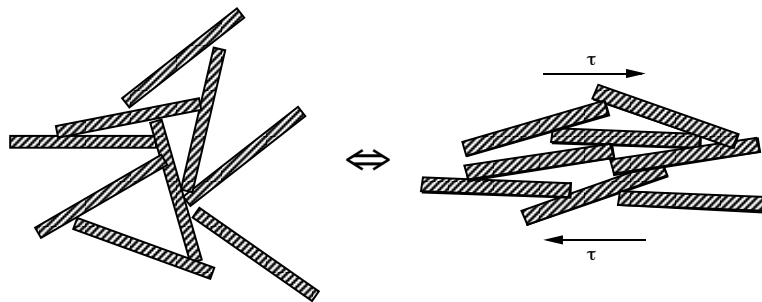


Figure 13.13. Comportement de suspensions aqueuses d'argiles.

### Beurre

Le beurre est une émulsion stable d'eau dans des lipides, légèrement thixotrope, formant des bandes de cisaillement. Son comportement réversible est illustré à la Figure 13.14

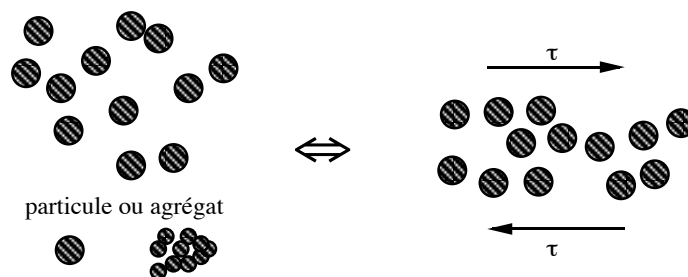


Figure 13.14. Comportement du beurre.

**Gels**

Les gels sont des suspensions instables, thixotropes, formant des réseaux. Leur comportement réversible est décrit à la figure 13.15.

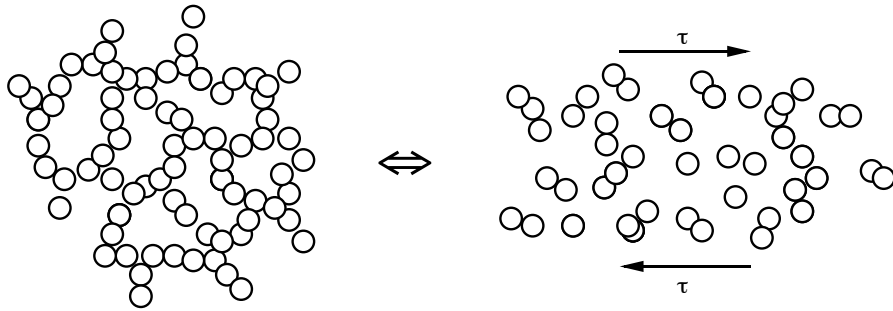


Figure 13.15. Comportement des gels.

**Mousses**

Les mousses sont des émulsions dans lesquelles il y a coalescence des particules. Leur comportement irréversible est illustré à la Figure 13.16.

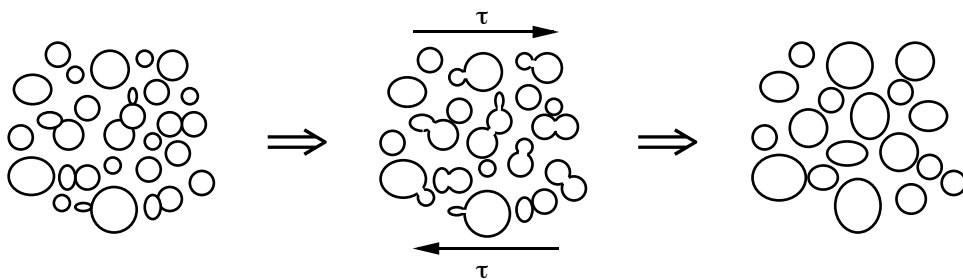


Figure 13.16. Comportement d'une mousse.

---

## 14 ETUDE DE CAS

### 14.1 LA PEINTURE<sup>1</sup>

Une peinture est un matériau fluide, liquide ou pulvérulent qui, appliqué sur un support, donne par un processus physique ou chimique, un film mince adhérent, protecteur et/ou décoratif. Il existe quatre grandes familles de constituants :

- *Liants* qui apportent les principales propriétés au revêtement et formeront un film protecteur. C'est le plus important, déterminant la classe de la peinture ;
- *Solvants* qui mettent le liant en solution et donnent la fluidité à la peinture pour sa fabrication et son application. Leur élimination permet la formation du film ;
- *Matières pulvérulentes* : ce sont d'abord les pigments, pour la couleur, l'opacité, la résistance à la corrosion et aussi les matières de charge pour renforcer le revêtement ou contrôler le brillant, par exemple ;
- *Additifs* qui ont une action sur la fabrication, le stockage, la formation et la protection du film. La création de film protecteur est directement liée à la phase de séchage...

Le séchage se fait par un mécanisme physique suivi ou non d'une réaction chimique :

- Le séchage physique est obtenu par évaporation à l'air. C'est soit l'élimination du solvant soit la fusion des particules de liant qui assure la cohésion du film et son adhérence au support, selon la peinture.
- Le séchage chimique est obtenu sous l'action de l'oxygène de l'air ou par élévation de la température, par l'adjonction d'un second liant ou déclenché par des catalyseurs, entre autres.
- 

Pour l'étude d'un produit, il faut premièrement savoir ce qu'on désire obtenir de celui-ci. Quel est son cycle de vie, son cahier des charges, ses caractéristiques ... Pour le cas de la peinture, on peut généraliser aux points suivants :

---

<sup>1</sup> Référence d'une partie du texte : <http://www.maison-et-sante.com/la-peinture/>

- 1) *Cycle de vie*: définition des conditions auxquelles sera soumis le produit :
  - la formation / la production,
  - le transport / le stockage,
  - le mélange,
  - l'application / le séchage.
- 2) *Cahier des charges*, critères de performance et propriétés désirées :
  - une bonne dispersion des pigments,
  - pas de coagulation  $\Rightarrow$  un mélange aisé,
  - une sédimentation lente,
  - une viscosité basse à l'application  $\Rightarrow$  la présence de surfaces lisses,
  - une viscosité élevée après l'application  $\Rightarrow$  pas de coulée.
- 3) Il faut traduire ses renseignements en *termes rhéologiques*. On veut donc :
  - une suspension stable,
  - une concentration de pigments selon l'opacité désirée,
  - une viscosité adaptée au mélange,
  - une pseudoplasticité prononcée,
  - une suspension élastique,
  - un mélange thixotropique,
  - un temps de relaxation suffisamment court pour un lissage de la surface.

## 14.2 LE CHOCOLAT

Le chocolat est constitué d'une phase continue, le beurre de cacao, et d'une phase dispersée solide composée de cacao, de sucre et de poudre de lait comme montré à la Figure 14.1.

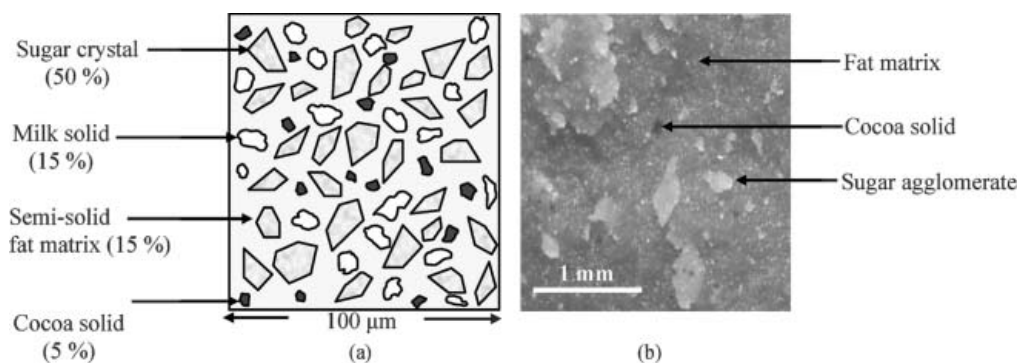


Figure 14.1. Microstructure du chocolat (a) et micrographie optique du chocolat au lait (b ; Chen & Mackley, Soft Matter 2005).



A une température supérieure à 35°C, le beurre de cacao est à l'état fondu et le chocolat peut être considéré comme une suspension concentrée. La quantité des composants solides varie entre 65 et 73% en poids. Les différents ingrédients solides diffèrent en concentration, en taille des particules, en forme et en propriétés de surface. De ce fait, on ne peut pas considérer la phase dispersée solide comme une phase uniforme. L'intervalle désiré de la distribution de taille des particules se situe entre 15 et 25  $\mu\text{m}$ . A cause du broyage lors de la mise en œuvre du chocolat, des particules fines avec des tailles inférieures à 0.1  $\mu\text{m}$  sont aussi présentes.

Les propriétés rhéologiques du chocolat sont contrôlées par l'ajustement de différents paramètres comme la concentration des composants solides, la taille des particules, le procédé de fabrication, la quantité finale d'eau (0.5% à 1.2%) et l'ajout d'ingrédients de surface active (lécithine). Ainsi la viscosité augmente avec le diamètre des particules de cacao et diminue avec celui du sucre (car l'un est hydrophobe et l'autre hydrophile). La lecithine réduit les valeurs de la viscosité, car elle forme un revêtement lubrifiant sur les particules (spécialement celles de sucre) et remplit les aspérités de surface.

A l'état fondu, la phase continue (beurre de cacao) montre un comportement newtonien à des températures au-dessus de 37°C. Sur toute la plage de température de 28°C à 100°C, la viscosité du beurre de cacao dans l'état non-cristallin obéit à la relation exponentielle de Frenkel – Eyring :

$$\eta = 5.7 \cdot 10^{-7} \exp \left\{ \frac{3533.7}{T} \right\} \quad (14.1)$$

où  $T$  est la température absolue.

L'incorporation de la phase dispersée dans le beurre de cacao entraîne des changements dans la viscosité et l'apparition d'un seuil d'écoulement ( $\tau_0$ ). Ce seuil d'écoulement peut être déterminé par des mesures directes ou par l'extrapolation des mesures rhéologiques par l'équation de Casson. En effet, en général, le chocolat suit la relation de Casson :

$$\sqrt{\tau} = \sqrt{\tau_0} + \sqrt{\eta_{Ca} \dot{\gamma}} \quad (14.2)$$

où  $\eta_{Ca}$  est la viscosité de Casson. Cependant, l'équation de Casson surestime le seuil d'écoulement comme le montre la Figure 14.2. Malgré tout, cette expression modélise bien le comportement du chocolat à des taux de cisaillement supérieurs à  $1 \text{ s}^{-1}$ .

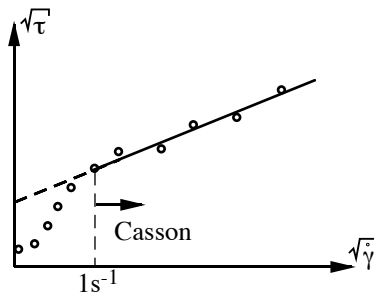


Figure 14.2. Représentation du comportement du chocolat et de l'équation de Casson.

Le seuil d'écoulement apparent ne peut pas être défini avec précision, car la microstructure du chocolat se désagrège en deux étapes décrites à la Figure 14.3 :

- rupture des contacts entre particules et formation d'agrégats,
- rupture des agrégats.

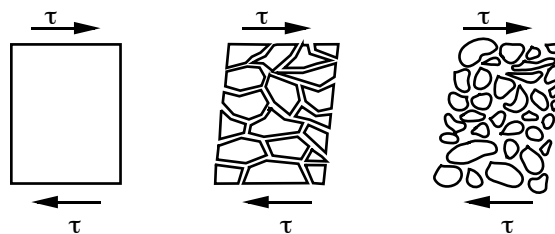


Figure 14.3. Illustration des deux étapes de désagrégation de la microstructure du chocolat.

La microstructure et la rhéologie sont bien évidemment liées. Le cisaillement casse les agrégats et diminue la viscosité. Les tests ne se font pas à microstructure constante et les phénomènes observés ne sont pas réversibles. La rhéologie peut donc servir à estimer la microstructure.

### 14.3 LE FROMAGE

Le lait est une émulsion lipides - eau. Pour produire du fromage à partir de cette matière première, il faut que des réactions chimiques aient lieu. Au fur et à mesure de la transformation, les propriétés mécaniques se modifient. La viscosité, puis la rigidité évoluent avec la

microstructure du fromage schématisée à la Figure 14.4. Les étapes de la fabrication du fromage sont les suivantes :

- *Ajout de bactéries* au lait. Cela initie le développement de l'acidité (et définit plus tard le goût). L'acidité favorise légèrement la floculation de la caséine du lait et l'agrégation des globules de matière grasse.
- *Ajout d'enzymes*. Celles-ci attaquent la caséine et causent leur coagulation pour former un caillot. La formation d'une structure continue donne au fromage sa rigidité, après l'expulsion de l'eau (petit-lait).

La caséine est une structure "spongieuse", déformable, et son volume effectif pour les calculs de viscosité est supérieur de deux à quatre fois au volume réel occupé par les micelles elles-mêmes, car il y a emprisonnement du solvant (solvatation).

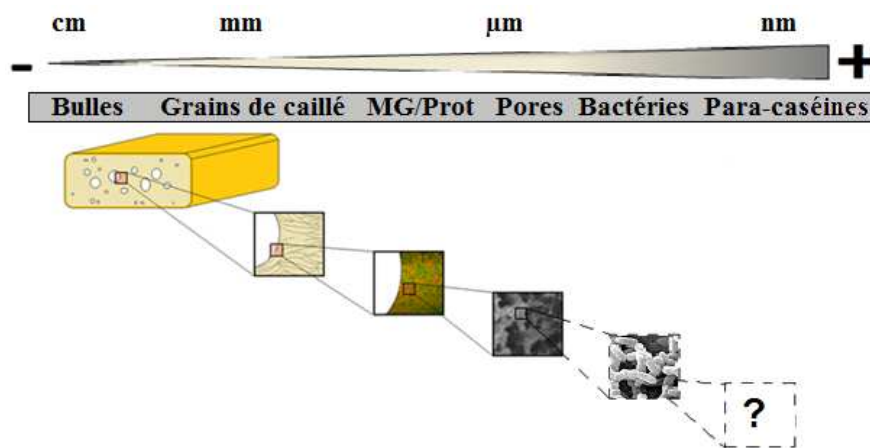


Figure 14.4. Schématisation de la structure des fromages à différentes échelles (Huc thèse 2013).

La structure du fromage suggère que le modèle de Kelvin ou le modèle standard linéaire puisse être utilisé. Une caractérisation de la viscosité devrait permettre un suivi de l'évolution structurale et mener à une automatisation du procédé de fabrication et à des contrôles de qualité. La Figure 14.5 décrit la viscosité en fonction du temps. L'accroissement de la viscosité est soudain et très prononcé.

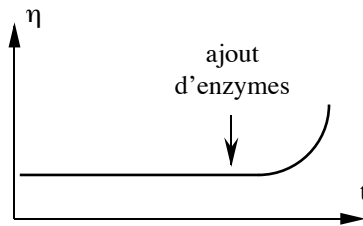


Figure 14.5. Evolution de la viscosité du fromage lors de sa fabrication.

Les propriétés changent dans le temps parce qu'il y a formation de grumeaux, ainsi :

- le choix de la taille de l'échantillon doit être judicieux,
- les temps de mesure doivent être courts,
- l'essai ne doit pas rompre la microstructure, ni interrompre les réactions chimiques et ainsi fausser la mesure de la viscosité.

Une viscosité trop faible est mesurée si l'essai est réalisé à une vitesse ou à une amplitude de cisaillement trop élevée, par suite d'une rupture de la structure du fromage. Une méthode de mesure de la viscosité est celle de la propagation d'ondes. En effet, l'atténuation est une fonction du taux de solidification. Le fromage solide a un comportement viscoélastique à des cisaillements  $\gamma$  petits, puis un comportement plastique comme l'esquisse la Figure 14.6.

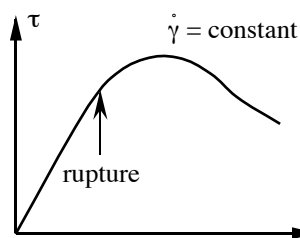


Figure 14.6. Représentation de la contrainte en fonction du temps.

#### 14.4 L'HEMORHEOLOGIE

L'hémorhéologie est la rhéologie du sang. Elle est très complexe et dépend de beaucoup de facteurs. Le sang est une suspension dont le plasma est le solvant (newtonien) et les cellules (globules rouges, globules blancs et plaquettes sanguines) compose la phase dispersée solide. La composition du sang est montrée à la Figure 14.7.

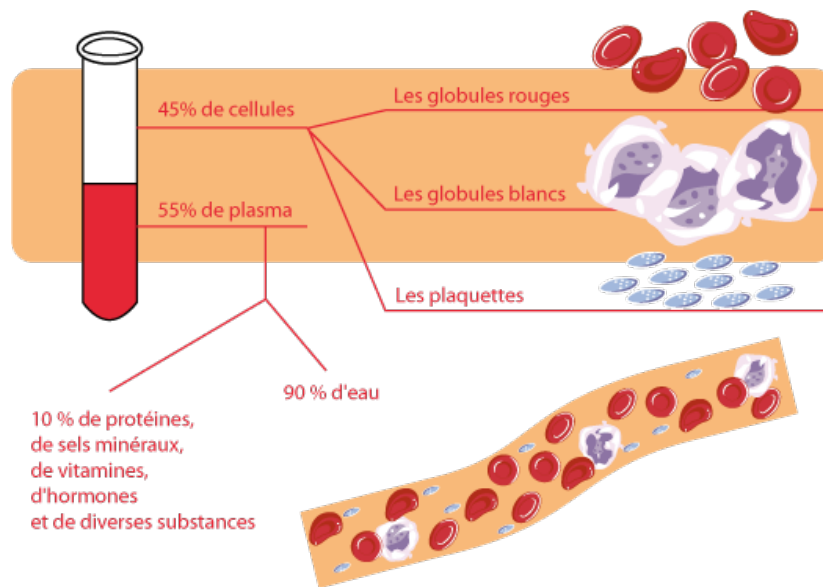


Figure 14.7. Composition du sang [<http://www.dondusang-doubs.org>].

Le plasma est le liquide qui tient en suspension les globules et permet leurs déplacements. Il représente environ 60% de la masse totale du sang, les 40% restants représentent la masse des globules rouges, des globules blancs et les plaquettes sanguines. Il est essentiellement constitué d'eau, dans laquelle se trouvent en solution des sels minéraux, du sucre, des protéines et diverses substances (hormones, vitamines, etc.) en très petite quantité.

Les globules rouges sont aussi appelés hématies ou érythrocytes. Ces cellules ne possèdent pas de noyau et ont la forme d'un disque, renflé sur les bords, aminci au centre. Leur diamètre est d'environ  $8\ \mu\text{m}$  et leur épaisseur  $2\ \mu\text{m}$ . Leur nombre normal varie entre 4.5 et 5 millions par  $\text{mm}^3$  de sang. La surface totale des globules rouges d'un être humain représente environ  $200\ \text{m}^2$ . L'hématocrite (H) caractérise la quantité de globules rouges dans le sang.

La viscosité dépend de la viscosité du plasma, de la concentration de protéines dans le plasma, de la fraction volumique des globules rouges, des globules blancs et des plaques, de la concentration de diverses substances (hormones, protéines, etc...), de l'agrégation des globules rouges, de leur déformabilité, du diamètre du canal, etc...

Le comportement du sang est décrit par le modèle de Carreau. Sa rhéologie est déterminée par la complexité de la composition et les nombreuses interactions entre les particules qui créent un seuil d'écoulement. La viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement à divers taux d'hématocrite, est représentée à la Figure 14.8. Le plasma pur est un liquide newtonien.

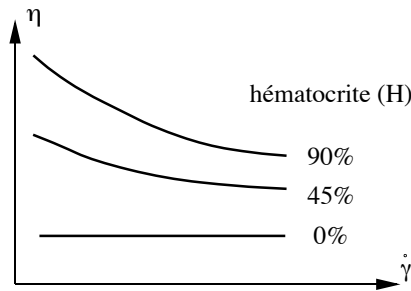


Figure 14.8. Evolution de la viscosité en fonction de la vitesse de cisaillement à divers taux d'hématocrite.

La structure et la géométrie caractéristique des globules rouges sont modifiées par l'écoulement. Cette déformation nécessite très peu d'énergie à cause de leur géométrie. Cette géométrie, qui dépend de la vitesse de cisaillement, est représentée schématiquement à la Figure 14.9.

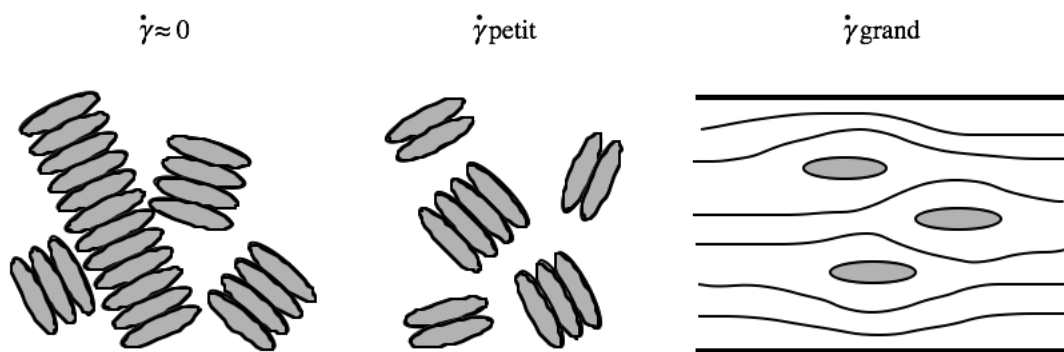


Figure 14.9. Evolution de la géométrie des globules rouges avec l'augmentation de la vitesse de cisaillement.

Les globules rouges migrent vers le centre des vaisseaux pendant l'écoulement. Il faut donc faire attention lors des mesures, car la zone riche en plasma près des parois fausse la mesure de la viscosité. Ceci est décrit à la Figure 14.10.

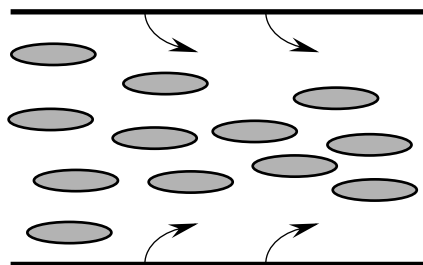


Figure 14.10. Représentation de l'écoulement du sang au travers d'un vaisseau.

La compréhension physiologique et chimique de l'hémorhéologie conduit à de nombreuses applications. La rhéologie du sang est un indicateur physiologique. Une hémorhéologie

anormale, en particulier une viscosité élevée, indique une pathologie : diabète, hypertension, anémie (défaut de cellules).

Il y a trois cas principaux de relations entre la rhéologie et certains phénomènes chimiques :

- $\eta$  élevé à  $\dot{\gamma}$  faible : agrégation,
- $\eta$  élevé à  $\dot{\gamma}$  élevé : déformabilité réduite des globules rouges,
- caractéristiques de coagulation,
- caractéristiques de sédimentation des globules rouges.

## 14.5 BIORHEOLOGIE CELLULAIRE

La cellule typique est composée essentiellement de trois éléments : une masse de *cytoplasme*, entourée d'une *membrane* cellulaire et contenant un *noyau* comme décrit à la Figure 14.11. Chacun de ces trois éléments possède, en lui-même, une structure fort complexe. La dimension des cellules varie considérablement. L'ordre de grandeur de la grande majorité des cellules d'animaux pluricellulaires est de 20 à 40  $\mu\text{m}$ .

Le cytoplasme est la masse de substance vivante comprise à l'intérieur de la membrane, à l'exclusion du noyau. Il est formé d'une substance de base, le hyaloplasme, dans laquelle baignent différents objets parmi lesquels se trouvent les mitochondries, le réticulum endoplasmique, les lysosomes ainsi que d'autres corpuscules et granulations. Le hyaloplasme est riche en eau et en substances dissoutes dans l'eau, parmi lesquelles se trouvent notamment des protéines, des sels, des glucides.

L'étude des cellules est délicate, parce que l'interaction entre corpuscules affecte leur évolution dans le milieu cellulaire.

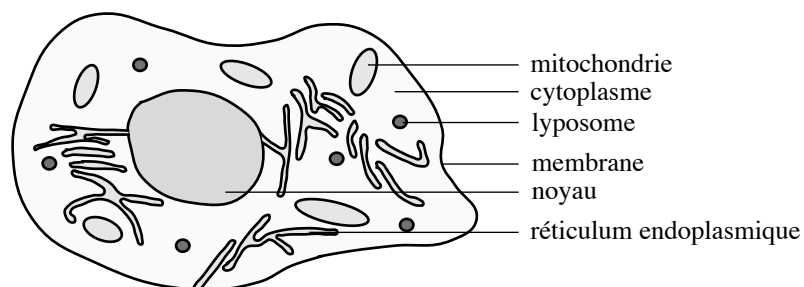


Figure 14.10. Représentation schématique d'une cellule.

Il faut noter que le cytoplasme coagule hors de la membrane cellulaire, ce qui nécessite une étude in-vitro et complique encore plus l'étude de la cellule.

Deux approches sont possibles pour déterminer la viscosité des cellules. La première consiste en l'introduction de particules de fer ou de nickel. On applique un champ magnétique et la viscosité est calculée à partir de la vitesse de déplacement de ces particules. Les relations utilisées sont :

$$\eta = f\left(M \text{ ou } F; \frac{dx}{dt}\right) \quad \text{et} \quad F = 6\pi\eta d \frac{dx}{dt} \quad (14.3)$$

où la force  $F$  est donnée par la formule de Stokes et  $d$  est le diamètre de la particule de métal. La deuxième approche est une centrifugation des particules (corpuscules) vers un côté de la cellule, le retour des corpuscules se faisant alors par mouvements Browniens. Ces mouvements suivent la loi de diffusion :

$$D_x = 14.7 \cdot 10^{-18} \frac{Tt}{\eta d} \quad (14.4)$$

où  $D_x$  est la distance parcourue en un temps  $t$  à la température  $T$ . La viscosité du cytoplasme est pour sa part reliée à la viscosité du hyaloplasme par la relation :

$$\eta_{\text{cytoplasme}} = 4.5\eta_{\text{hyaloplasme}} \quad (14.5)$$

La biorhéologie a encore beaucoup d'autres applications pathologiques et physiologiques. L'étude de la salive se révèle très intéressante. Le poids moléculaire de la salive est fonction de l'état de santé du patient. L'étude du mucus permet d'apprécier les effets des bactéries et des hormones.

---



## 15 PHENOMENES

Ce Chapitre illustre la diversité des phénomènes observés lors de l'écoulement de liquides viscoélastiques, sur la base d'observations reportées dans la littérature.

### 15.1 EFFET WEISSENBERG

La Figure 15.1 décrit l'effet Weissenberg. Un bâton tourne dans un récipient contenant un liquide viscoélastique. Lorsque le bâton tourne, le liquide monte le long du bâton tandis qu'un liquide newtonien se collerait contre la paroi sous l'effet des forces d'inertie.

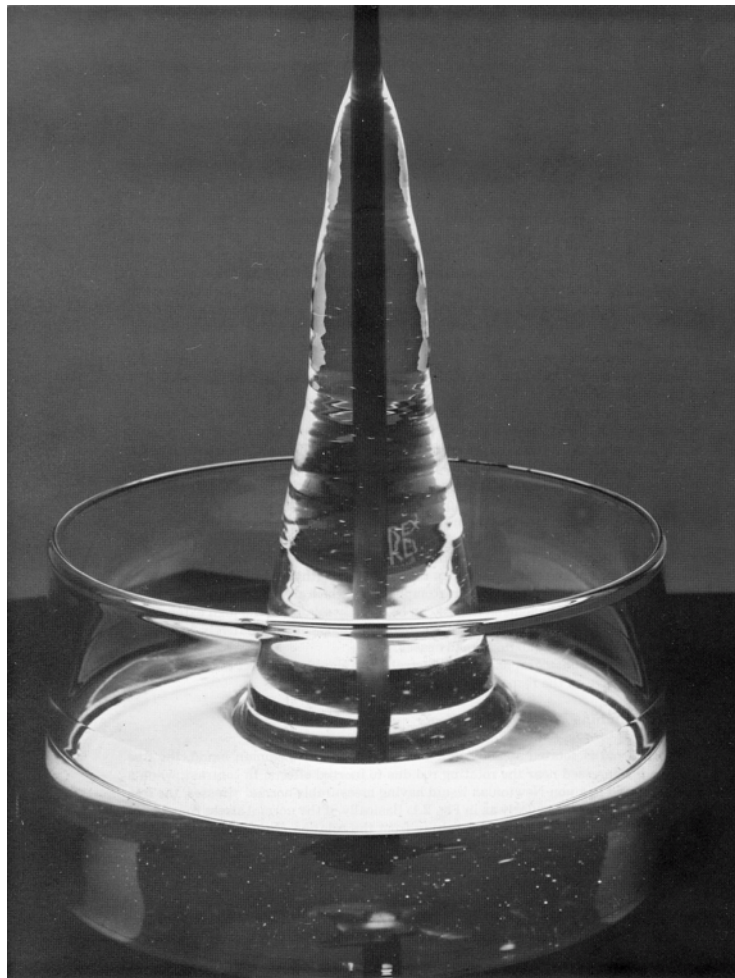


Figure 15.1. Illustration de l'effet Weissenberg. Le polymère est un polyisobutylène à haut poids moléculaire dans un solvant à bas poids moléculaire de même nature (reproduit de H.A. Barnes, J.F. Hutton and K. Walters, *An Introduction to Rheology*, Elsevier, 1989, avec la permission de Elsevier Science).

Les changements de la surface libre d'un additif pour huile STP (*motor oil additive*) à proximité d'un bâton tournant à différentes vitesses de rotation sont représentés à la Figure 15.2. Lorsque le bâton ne tourne pas, la montée est uniquement due à la tension de surface. A une vitesse de rotation d'environ 3 tours/min le liquide commence à monter le long du bâton. La forme initialement concave tend lentement vers une forme légèrement convexe. La configuration finale, stationnaire de la goutte montante est montrée sur la figure en (h). La goutte semble rejoindre la surface plane du liquide en un point de discontinuité. Un examen détaillé révèle un col avec un très faible rayon.

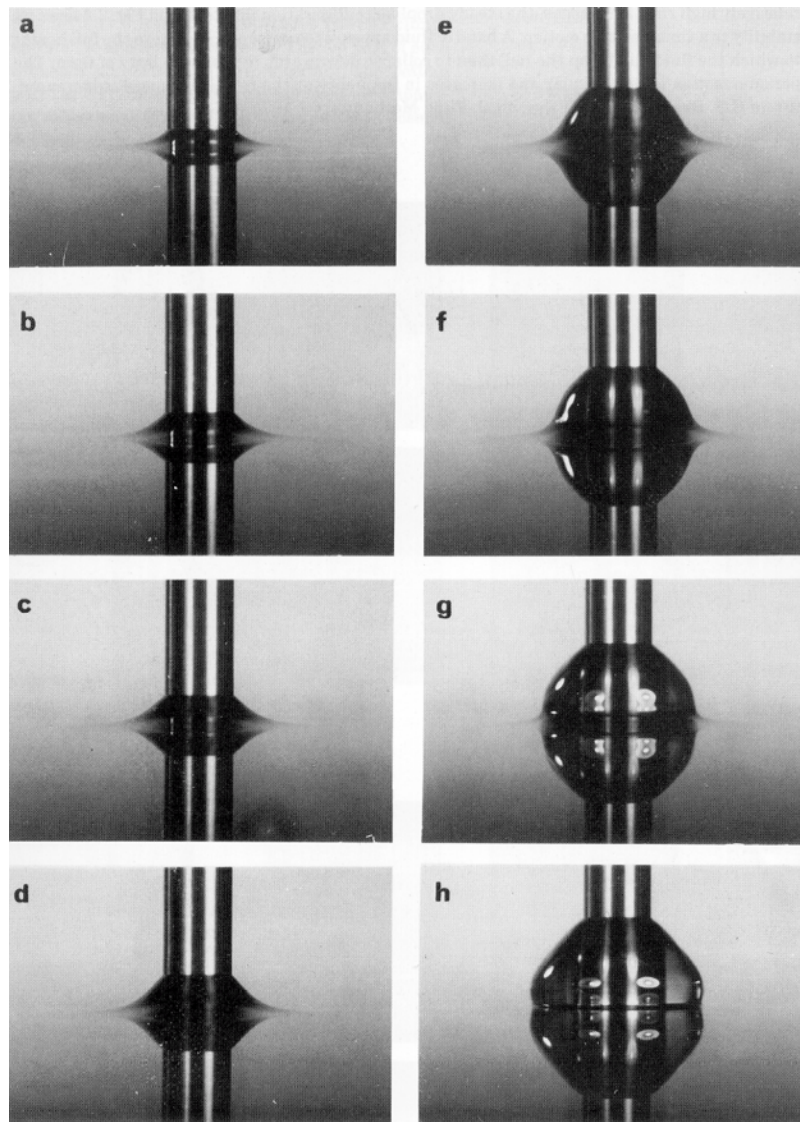


Figure 15.2. Illustration des changements de la surface libre d'un additif pour huile STP (*motor oil additive*) près d'un bâton tournant à différentes vitesses de rotation (a) 1 tours/min, (b) 2.0 tours/min, (c) 2.5 tours/min, (d) 3.0 tours/min, (e) 4.6 tours/min, (f) 5.5 tours/min, (g) 7.0 tours/min, (h) 8.5 tours/min (instable). (Reproduit de *J. Fluid Mechanics*, G.S. Beavers and P.D. Joseph, 69, 1975, 475, avec la permission de Elsevier Science).

## 15.2 GONFLEMENT DE FILIERE (*DIE SWELL*)

Le phénomène de gonflement de filière se produit lorsqu'un fluide sort d'une filière d'extrusion dans un milieu neutre. On considère deux cas présentés à la Figure 15.3 où le liquide extrudé est un fluide newtonien ( $\eta = 11.6 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\text{Re} = 10^{-3}$ ) et le second où le fluide est non-newtonien ( $\eta = 11.4 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ ,  $\text{Re} = 0.0009$ ,  $\text{We} = 0.272$ ).

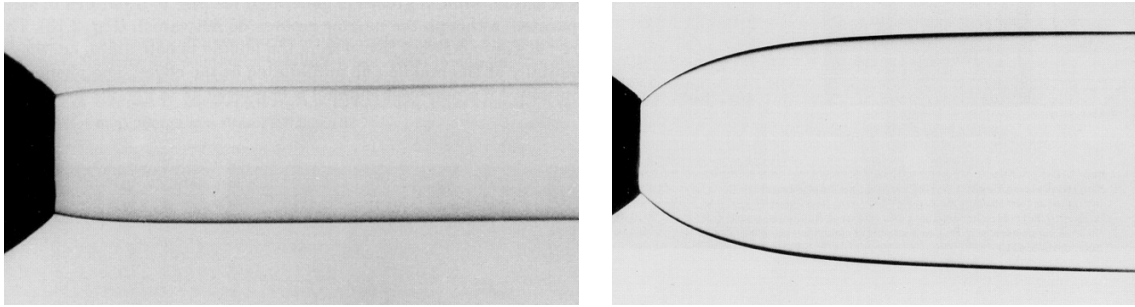


Figure 15.3. Illustration du gonflement à la sortie d'une filière pour un liquide newtonien (à gauche) et non-newtonien (à droite ; reproduit de D.V. Boger, K. Walters, *Rheological Phenomena in Focus*, Elsevier, 1993, p. 21, avec la permission de Elsevier Science).

Le même phénomène apparaît avec un canal de sortie plus étroit. Soit un milieu inerte constitué de 5% de solution aqueuse de polyacrylate : dès lors le gonflement de filière selon le flux est représenté à la Figure 15.4, où la partie (a) montre un écoulement normal (faible flux), la partie (b) un flux modéré et la partie (c) un flux élevé.

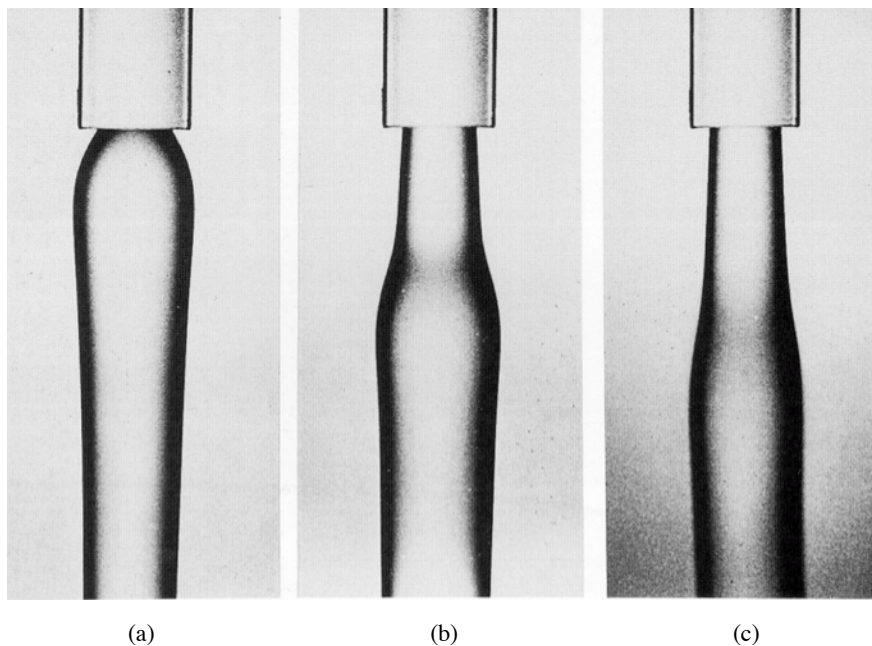


Figure 15.4. Phénomène de gonflement à la sortie d'une filière où (a) montre un écoulement normal (faible flux), (b) un flux modéré et (c) un flux élevé reproduit de *Rheologica Acta*, H. Giesekus, 8, 1968, 411, avec la permission de Elsevier Science).

Le nombre de Reynolds,  $Re$ , augmente avec le flux. Le conflit entre l'inertie du fluide et son élasticité apparaît. Le phénomène de gonflement est non seulement retardé par l'inertie du liquide, mais aussi diminué. Un tel gonflement peut s'expliquer facilement au premier abord. La Figure 15.5 donne à elle seule la principale cause de ce gonflement.

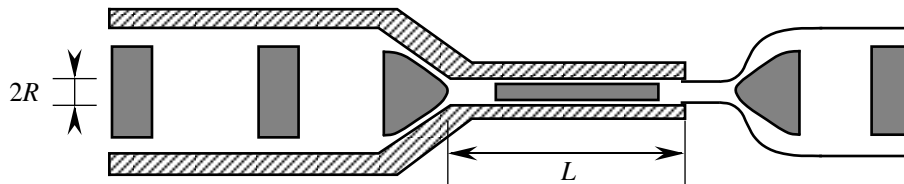


Figure 15.5. Explication graphique du phénomène de gonflement à la sortie d'une filière.

On introduit un rapport de diamètre (*die swell*) qui caractérise le gonflement de filière. Il s'agit du rapport du diamètre du gonflement par le diamètre du tube. On dénombre plusieurs relations de causes à effets, dont :

- $L/R$  augmente  $\Rightarrow Re$  augmente  $\Rightarrow Die\ swell$  diminue,
- $u_{\text{fluide}}$  diminue  $\Rightarrow De$  diminue  $\Rightarrow Die\ swell$  diminue,
- $T$  augmente  $\Rightarrow$  Force élastique diminue  $\Rightarrow Die\ swell$  diminue.

où  $L$  est la longueur de la filière,  $R$  son rayon,  $u_{\text{fluide}}$  la vitesse du fluide traversant la filière,  $Re$  le nombre de Reynolds et  $De$  le nombre de Deborah. Il y a une relation entre la vitesse de cisaillement et le *die swell*. Cette relation est décrite à la Figure 15.6.

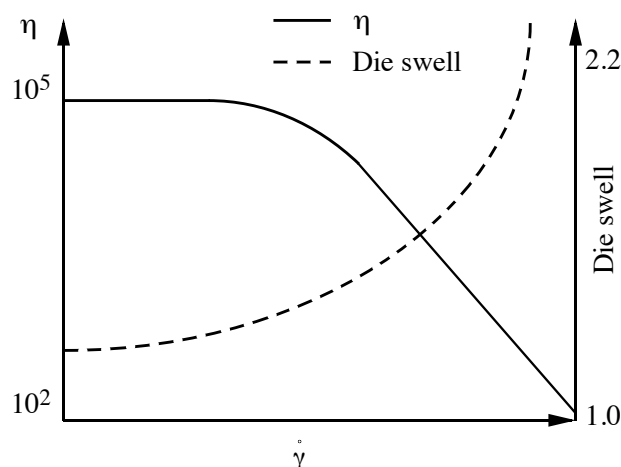


Figure 15.6. Relation entre la viscosité, le *die swell* et la vitesse de cisaillement.

### 15.3 VORTEX

Le vortex est la frontière séparant le fluide qui va pénétrer dans le tube de plus faible diamètre et le fluide secondaire, bloqué par les bords. L'élément de base d'un flux passant abruptement d'un tube large dans un tube de plus faible diamètre est décrit à la Figure 15.7.

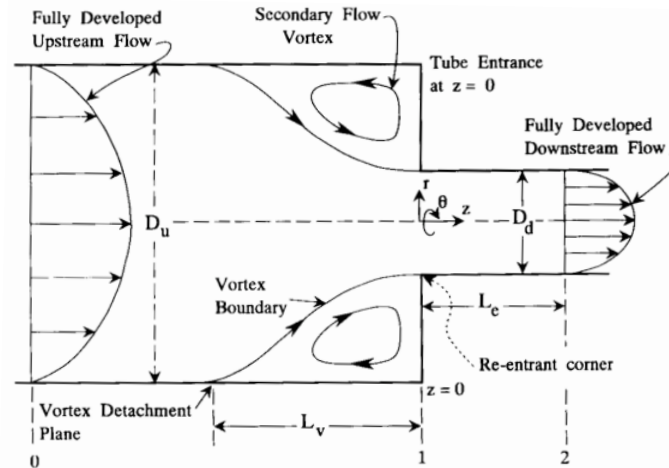


Figure 15.7. Représentation schématique du vortex reproduit de D.V. Boger, K. Walters, *Rheological Phenomena in Focus*, Elsevier, 1993, p. 36, avec la permission de Elsevier Science).

Il est possible de déduire mathématiquement l'écoulement d'un fluide, ce qui ne sera toutefois pas traité dans ce cours. On se contentera d'observer ce qui se passe : les photos de la Figure 15.8 décrivent une solution aqueuse de 0.04% polyamide et sirop de glucose qui s'écoule dans un tube avec diverses conditions.

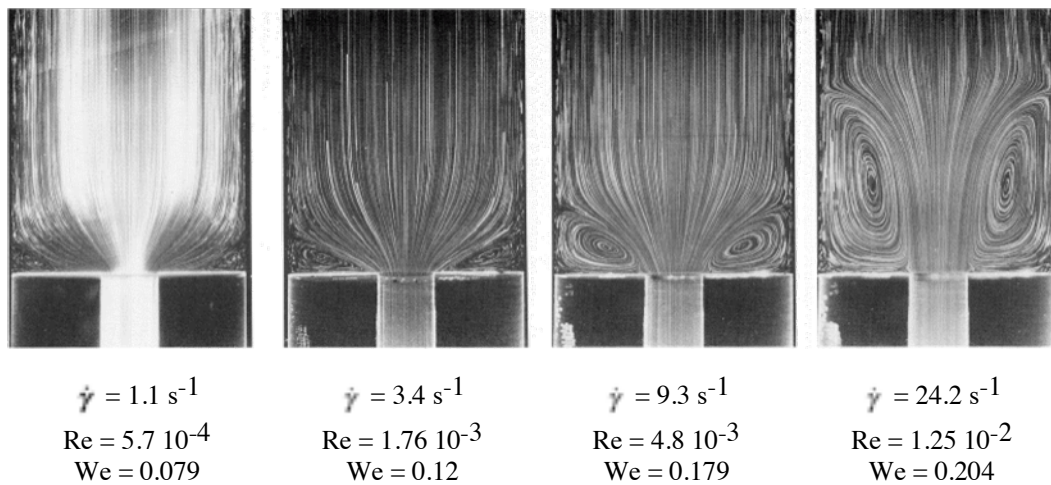


Figure 15.8. Illustration du Vortex d'une solution aqueuse de 0.04% polyamide et sirop de glucose qui s'écoule dans un tube avec diverses conditions (reproduit de *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, D.V. Boger, D.U. Hur and R.J. Binington, 20, 1986, 31, avec la permission de Elsevier Science).



La géométrie du flux est dictée par le matériau qui s'écoule, la géométrie du tube et celle des bords de l'entrée. Soit une solution aqueuse de 0.03% Separan MG55 et sirop de glucose, appelée liquide de Boger, qui s'écoule dans un tube. Les conditions physiques sont :

- $\dot{\gamma} = 8.3 \text{ s}^{-1}$
- $Re = 2.9 \cdot 10^{-3}$
- $We = 0.0169$

Les photos de la Figure 15.9 décrivent deux écoulements différents, car les bords d'entrée sont différents. Sur la figure (a), on a des bords vifs et sur la figure (b) des bords arrondis avec un rayon de 2 mm pour un diamètre de 5.5 mm du tube d'arrivée. La contraction est de 4:1. Les lignes d'écoulement illustrent la sensibilité du champ d'écoulement à la géométrie du bord d'entrée. En regardant ces photos, on vérifie la pertinence de la correction de Bagley.

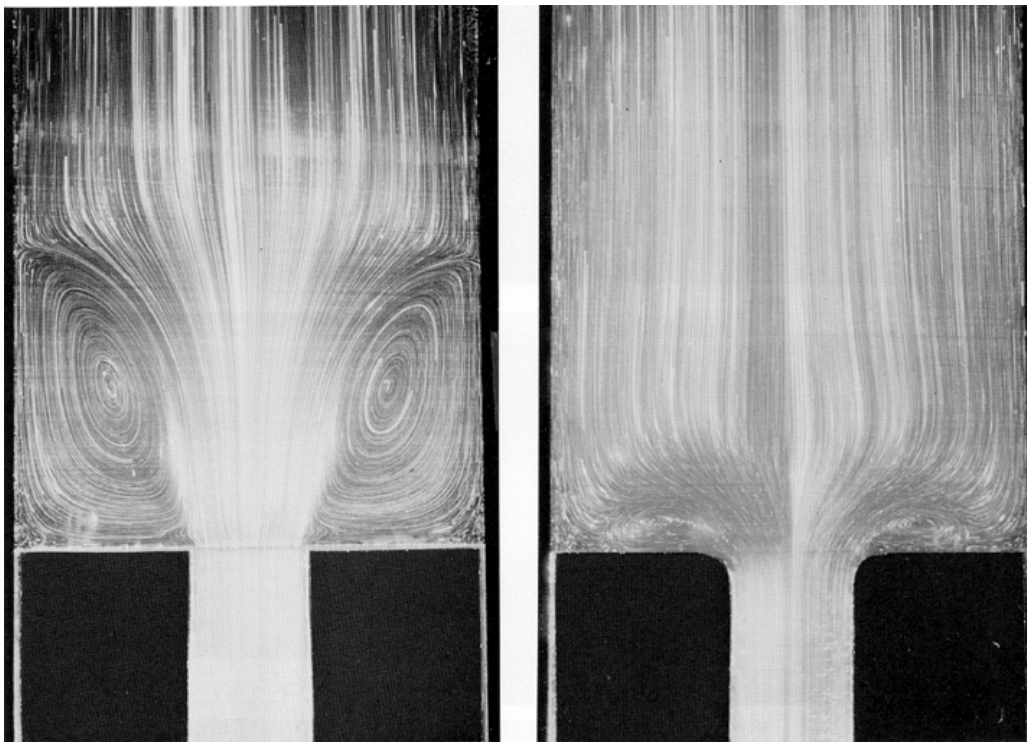


Figure 15.9. Illustration du Vortex d'une solution aqueuse 0.03% Separan MG55 et sirop de glucose dans les mêmes conditions. Les bords d'entrée du tube sont vifs en (a) et arrondis en (b) (reproduit de D.V. Boger, K. Walters, *Rheological Phenomena in Focus*, Elsevier, 1993, p. 45, avec la permission de Elsevier Science).

## 15.4 JET LIQUIDE EN FORME D'ARBRE

L'écoulement d'une solution de 3% de polyacrylamide à partir d'un trou circulaire de 1 mm de diamètre dans un récipient qui contient le même liquide thixotropique élastique a un comportement différent selon le débit. A des débits modérés on observe un comportement quasi newtonien. A des débits plus importants un flux en forme d'arbre est observé. Un jet concentré, qui ne s'agrandit pas sensiblement avec la distance, est émis par le trou circulaire jusqu'à ce que le jet éclate de telle manière que les lignes d'écoulement semblent se séparer comme les branches d'un arbre. Ce phénomène est représenté à la figure 15.11.

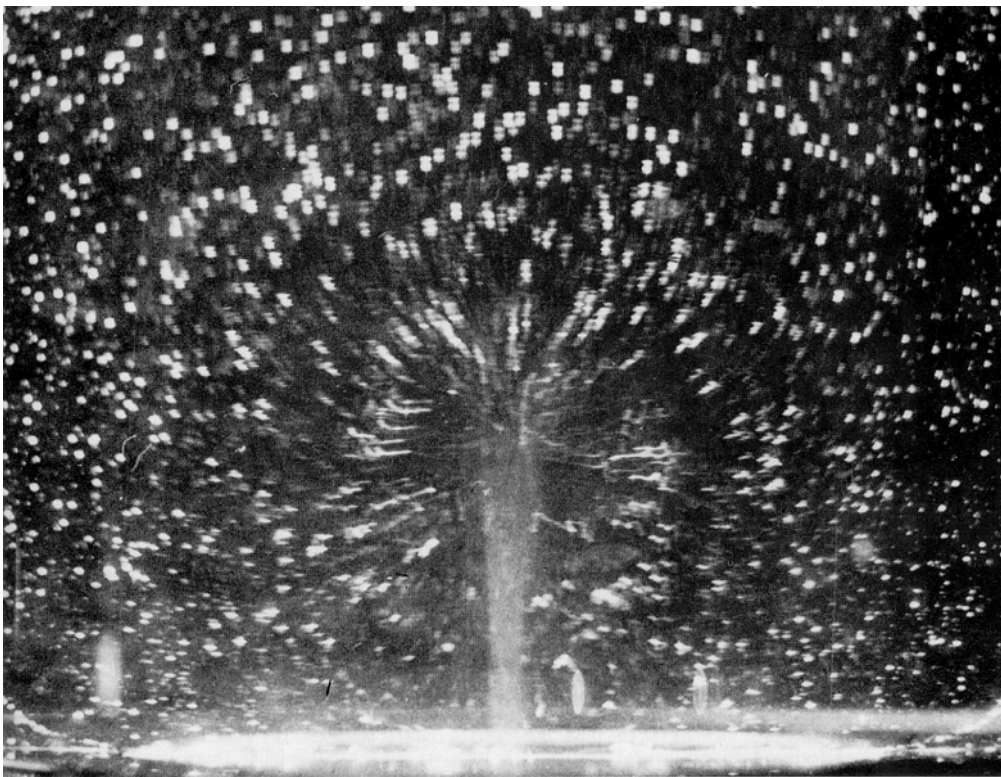


Figure 15.10. Illustration d'un jet de liquide en forme d'arbre d'une solution de 3% de polyacrylamide à partir d'un trou circulaire de 1 mm de diamètre dans un récipient qui contient le même liquide thixotropique élastique. Pour que le phénomène apparaisse, il faut un haut débit (reproduit de *Rheologica Acta*, H. Giesekus, 8, 1969, 411, avec la permission de Elsevier Science).

### 15.5 FLUX RADIAL DANS UNE CELLULE HELE-SHAW

Ce phénomène est observé dans le cas de l'injection d'un liquide dans un autre entre deux plaques parallèles séparées par une très faible distance dont l'une est percée d'un trou en son centre. On injecte un premier liquide par ce trou puis un deuxième qui repousse le premier. La Figure 15.11 reproduit le type d'effet observé, le premier liquide étant transparent et le second opaque. A la figure (a) un fluide newtonien déplace une solution thixotropique et élastique de polyacrylamide (rapport de viscosité  $10^3$ ). La figure (b) montre un fluide newtonien déplaçant une solution thixotropique et élastique de polyacrylamide (rapport de viscosité  $10^5$ ). La figure (c) illustre un fluide newtonien déplaçant un fluide newtonien (rapport de viscosité 10). La figure (d) représente un fluide de type Boger déplaçant un fluide newtonien (rapport de viscosité 10).

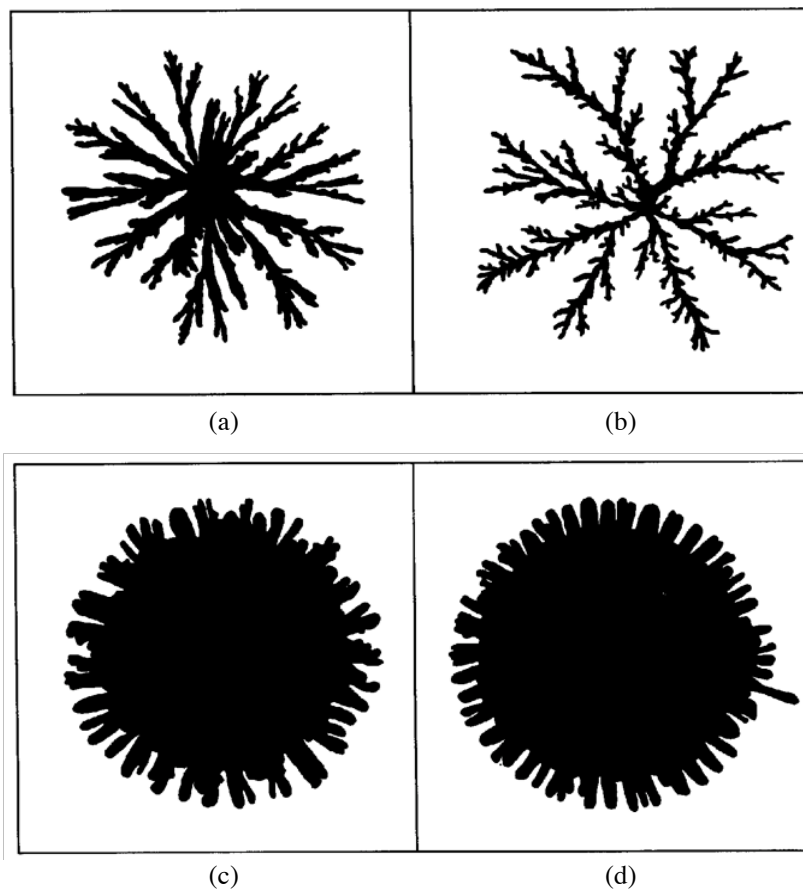


Figure 15.11. Illustration d'un flux radial dans une cellule Hele-Shaw. Il s'agit d'injecter successivement par le centre de l'une des deux plaques parallèles deux liquides (le premier est transparent, le second opaque). (a) une solution thixotropique et élastique de polyacrylamide (premier liquide) - un fluide newtonien (second liquide) (rapport de viscosité 1'000); (b) une solution thixotropique et élastique de polyacrylamide - un fluide newtonien (rapport de viscosité 100'000); (c) un fluide newtonien - un fluide newtonien (rapport de viscosité 10) et (d) un fluide newtonien - un fluide de type Boger (rapport de viscosité 10) (reproduit de la *Society of Petroleum Engineers*, E. Allen and D.V. Boger, Paper No 18097, 63rd Annual Technical Conference and Exhibition, Houston, USA, 1988).



**15.6 JET CAPILLAIRE AVEC UN NOMBRE DE REYNOLDS ELEVE**

La Figure 15.12 montre la forme d'un flux avec un nombre de Reynolds ( $Re$ ) élevé à la sortie d'un trou de 6.53 mm de diamètre avec en (a) une solution aqueuse 50 ppm d'un oxyde de polyéthylène, et de l'eau en (b). On observe la formation rapide de turbulences en surface des deux liquides, la transition entre zone lisse et zone turbulente ayant lieu plus tôt dans le premier cas, et la formation de gouttelettes dispersées étant également fortement réduite.

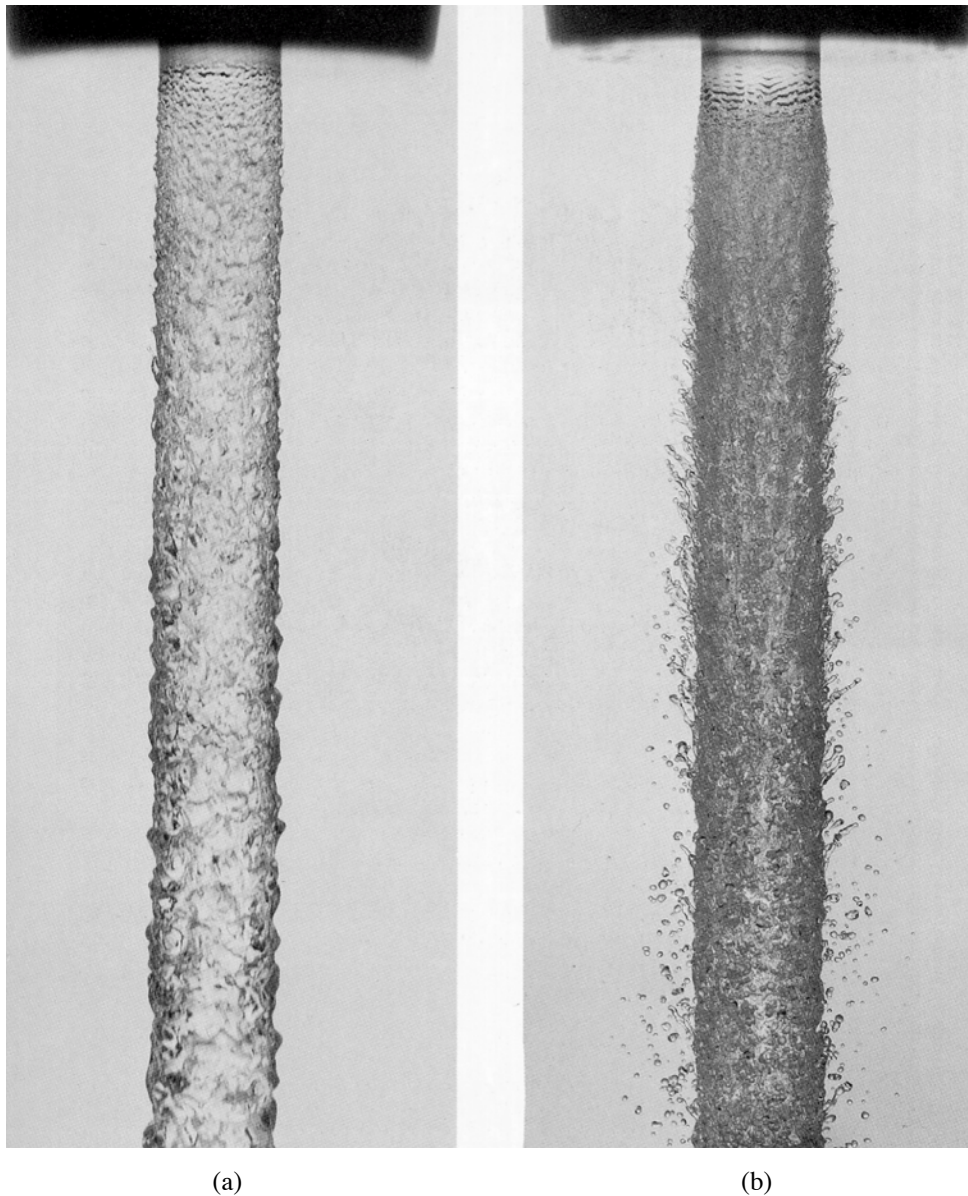


Figure 15.12. Illustration d'un flux avec un nombre de Reynolds ( $Re$ ) élevé à la sortie d'un trou de 6,53 mm de diamètre. En (a), il s'agit d'une solution aqueuse 50 ppm d'un oxyde de polyéthylène et en (b) d'eau (reproduit de *Physics of Fluids*, J.W. Hoyt and J.J. Taylor, 20, 1977, S253, avec la permission de Elsevier Science).

La Figure 15.13 montre les mêmes jets capillaires que ceux de la Figure 15.12, cette fois ci à 1 m de la sortie du trou. A nouveau l'apparence du jet diffère suivant la composition des liquides. On note que les gouttelettes dispersées pour l'eau sont éliminées par l'addition d'un polymère de haut poids moléculaire. La surface extérieure du jet avec du polymère est aussi beaucoup plus lisse.

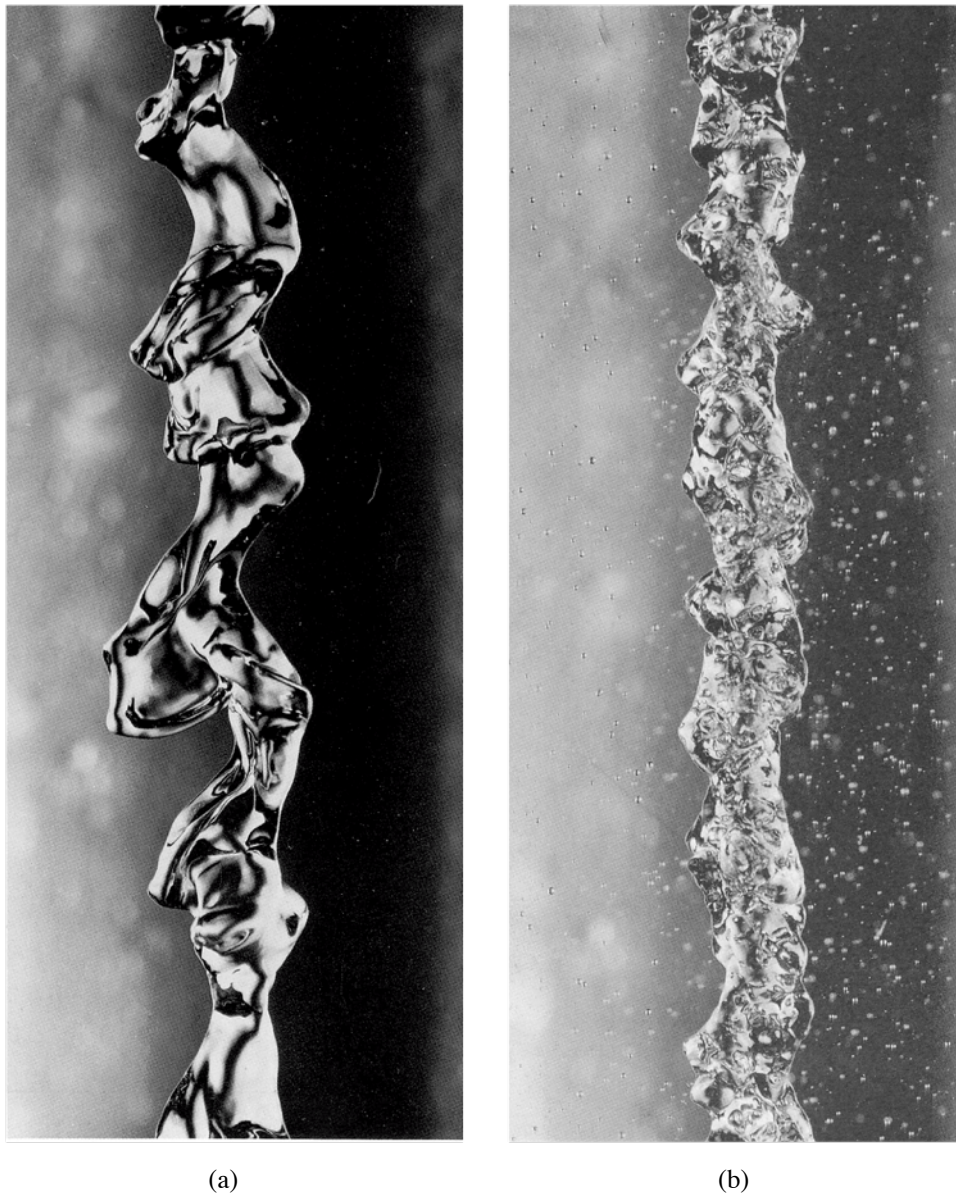


Figure 15.13. Illustration d'un jet capillaire avec un nombre de Reynolds ( $Re$ ) élevé à 1 m de la sortie d'un trou de 6.35 mm. Il s'agit d'un jet d'une solution aqueuse de 200 ppm PEO en (a) et d'un jet d'eau en (b) (reproduit de *Physics of Fluids*, J.W. Hoyt and J.J. Taylor, 20, 1977, S253, avec la permission de Elsevier Science).





## LISTE DES SYMBOLES

Cette liste contient les symboles qui ont été utilisés dans cet ouvrage. Seuls figurent les symboles qui ont une signification physique. On donne le symbole, sa définition, sa *traduction anglaise*, son unité et la page de sa première apparition.

*Romains*

$a$	Coefficient du modèle de Ellis ( <i>Ellis model coefficient</i> )	[s]	7.5
$a$	Taille des particules ( <i>Particles size</i> )	[m]	12.5
$a$	Grand axe de l'ellipsoïde ( <i>Major ellipsoid axis</i> )	[m]	13.8
$a_T$	Coefficient de translation ( <i>Shift factor</i> )	[-]	5.1
$a_r$	Rapport des dimensions ( <i>Aspect ratio</i> )	[-]	13.8
$A$	Surface ( <i>Surface</i> )	[m <sup>2</sup> ]	1.2
$A$	Constante de Hamacker ( <i>Hamacker's constant</i> )	[J]	12.6
$a_i, a', A, A'$	Constantes ( <i>Constants</i> )		2.4
$b = 1/n$	Coefficient pour la correction de Rabinovitch ( <i>Rabinovitch correction coefficient</i> )	[-]	9.4
$b, b', b_i, B$	Constantes ( <i>Constants</i> )		2.4
$b$	Largeur de la plaque ( <i>Plate width</i> )	[m]	10.13
$b$	Petit axe de l'ellipsoïde ( <i>Minor ellipsoid axis</i> )	[m]	13.8
$B$	Largeur de la conduite ( <i>Duct width</i> )	[m]	8.2
$c_f$	Coefficient de frottement de peau ( <i>Skin friction coefficient</i> )	[-]	10.15
$c, C, C_1, C_2$	Constantes ( <i>Constants</i> )		2.8
$C_1, C_2$	Coefficients du modèle WLF ( <i>WLF model coefficients</i> )	[-][°C]	7.13
$C_D$	Coefficient de trainée adimensionnel ( <i>Adimensional drag coefficient</i> )	[-]	10.16
$C_F$	Coefficient de force adimensionnel ( <i>Adimensional force coefficient</i> )	[-]	8.18
$C_i$	Coefficients de la série de Prony ( <i>Prony series coefficients</i> )	[-]	4.3
$C_L$	Coefficient de portance adimensionnel ( <i>Adimensional lift coefficient</i> )	[-]	10.16

$d$	Constante ( <i>Constant</i> )		5.8
$d$	Dimension caractéristique de la géométrie d'écoulement ( <i>Characteristic flow geometry dimension</i> )	[m]	1.17
$d$	Diamètre de la sphère ou de la fibre ( <i>Sphere or fiber diameter</i> )	[m]	12.6
$D$	Constante ( <i>Constant</i> )		2.5
$D$	Coefficient de diffusion ( <i>Diffusion coefficient</i> )	[m <sup>2</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	5.3
$D$	Diamètre de la conduite ( <i>Duct diameter</i> )	[m]	10.4
$De$	Nombre de Deborah ( <i>Deborah's number</i> )	[-]	1.18
$D_h$	Diamètre hydraulique équivalent ( <i>Equivalent hydraulic diameter</i> )	[m]	10.12
$D_x$	Distance de diffusion due aux mouvements browniens ( <i>Diffusion distance due to Brownian movements</i> )	[m]	12.5
$e$	Facteur de correction de Bagley ( <i>Bagley's correction factor</i> )	[-]	9.2
$e$	Charge unitaire ( <i>Unit charge</i> )	[C]	12.8
$E$	Module de Young, module élastique ( <i>Young's modulus</i> )	[Pa]	1.2
$E$	Champ électrique ( <i>Electrical field</i> )	[V·m <sup>-1</sup> ]	12.8
$E'$	Module de conservation, module de stockage ( <i>Storage modulus</i> )	[Pa]	3.4
$E''$	Module de perte, module de friction interne ( <i>Loss modulus</i> )	[Pa]	3.5
$E_I$	Module du ressort en série dans le modèle SLSM ( <i>Elastic (spring) modulus</i> )	[Pa]	2.14
$E_{II}$	Module du ressort en parallèle dans le modèle SLSM ( <i>Elastic (spring) modulus</i> )	[Pa]	2.14
$E^*$	Module complexe ( <i>Complex modulus</i> )	[Pa]	3.11
$E_a$	Energie d'activation ( <i>Activation energy</i> )	[J]	4.8
$E_C$	Module de fluage ( <i>Creep modulus</i> )	[Pa]	1.3
$E_R$	Module relaxé ( <i>Relaxed modulus</i> )	[Pa]	2.15
$E_U$	Module non relaxé ( <i>Unrelaxed modulus</i> )	[Pa]	2.16
$E_{\dot{\gamma}}$	Energie pour une vitesse de cisaillement constante ( <i>Energy for a constant shear rate</i> )	[J]	7.9
$E_{\tau}$	Energie pour une contrainte de cisaillement constante ( <i>Energy for a constant shear stress</i> )	[J]	7.9
$f$	Facteur de frottement ( <i>Friction factor</i> )	[-]	10.4

$f$	Fraction de volume libre ( <i>Fraction of free volume</i> )	[-]	5.5
$f_g$	Fraction de volume libre à la température de transition vitreuse ( <i>Fraction of free volume, at the glass transition temperature</i> )	[-]	7.12
$F$	Force ( <i>Force</i> )	[N]	1.2
$F_{drag}$	Force de trainée ( <i>Drag force</i> )	[N]	10.13
$F_H$	Constante d'Henry ( <i>Henry's constant</i> )	[-]	12.9
$g$	Accélération de la pesanteur ( <i>Gravitational acceleration</i> )	[m·s <sup>-2</sup> ]	10.3
gelTg	Température pour laquelle les temps de gélation et de vitrification sont égaux ( <i>Temperature for which gelation and vitrification times are equal</i> )	[K]	11.11
$G$	Module élastique de cisaillement ( <i>Shear modulus</i> )	[Pa]	1.1
$G'$	Module de stockage en cisaillement ( <i>Shear storage modulus</i> )	[Pa]	9.10
$G''$	Module de perte en cisaillement ( <i>Shear loss modulus</i> )	[Pa]	9.10
$h, H$	Hauteur de la conduite ( <i>Duct height</i> )	[m]	8.2
$h$	Distance entre particules ( <i>Distance between particles</i> )	[m]	12.6
$h_g$	Hauteur piézométrique ( <i>Piezometric height</i> )	[m]	10.3
$H$	Chaleur de réaction ( <i>Heat of reaction</i> )	[J]	11.3
$H(\tau_\sigma)$	Spectre de temps de relaxation ( <i>Relaxation time spectrum</i> )	[-]	4.6
$j$	Nombre de dimensions ( <i>Number of dimensions</i> )	[-]	8.16
$J(t)$	Fonction de complaisance de fluage ( <i>Retardation function</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	1.12
$J_v(t)$	Partie visqueuse de la fonction de complaisance de fluage ( <i>Viscous part of the retardation function</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	2.16
$J_u$	Complaisance non relaxée ( <i>Unrelaxed compliance</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	2.16
$J_R$	Complaisance relaxée ( <i>Relaxed compliance</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	2.16
$J'$	Complaisance de conservation ( <i>Storage compliance</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	3.7
$J''$	Complaisance de perte ( <i>Loss compliance</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	3.7
$J^*$	Complaisance complexe ( <i>Complex compliance</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	3.11
$k$	Constante de Boltzmann ( <i>Boltzmann's constant</i> )	[J·K <sup>-1</sup> ]	4.8
$k$	Coefficient du modèle de Carreau-Yashuda ( <i>Carreau-Yashuda model coefficient</i> )	[-]	7.4

$k_e$	Coefficient d'Einstein ( <i>Einstein's coefficient</i> )	[-]	13.1
$k_e$	Coefficient de Huggins ( <i>Huggin's coefficient</i> )	[-]	13.2
$k_0$	Constante cinétique ( <i>Rate constant</i> )	[s <sup>-1</sup> ]	11.4
$K$	Module volumique ( <i>Bulk modulus</i> )	[Pa]	1.11
$K$	Coefficient des modèles de Cross et de Ellis ( <i>Cross and Ellis models coefficient</i> )	[s]	7.4
$l, l_0$	Longueur, longueur initiale ( <i>Length, initial length</i> )	[m]	1.12
$L$	Longueur ( <i>Length</i> )	[m]	8.15
$L$	Longueur de la conduite ou de la fibre ( <i>Duct or fiber length</i> )	[m]	8.5
$L(\tau_\sigma)$	Spectre de retard ( <i>Retardation spectrum</i> )	[-]	4.6
$L[ ]$	Transformée de Laplace ( <i>Laplace Transform</i> )		2.27
$m$	Paramètre du modèle de Findley ( <i>Parameter of Findley's model</i> )	[s <sup>-n</sup> ]	2.4
$m$	Paramètre du modèle de Bird-Leider ( <i>Parameter of Bird-Leider's model</i> )	[Pa·s <sup>-n</sup> ]	12.16
$m$	Ordre réactionnel ( <i>Reaction order</i> )	[-]	11.4
$M$	Couple ( <i>Torque</i> )	[N·m]	9.6
$M$	Masse ( <i>Mass</i> )	[kg]	8.15
$M_C$	Poids moléculaire critique ( <i>Critical molecular weight</i> )	[g·mol <sup>-1</sup> ]	7.7
$M_W$	Poids moléculaire moyen en masse ( <i>Weight average molecular weight</i> )	[g·mol <sup>-1</sup> ]	6.7
$n$	Indice de pseudo-élasticité ( <i>Pseudo-elasticity number</i> )	[-]	6.4
$n$	Variable en analyse dimensionnelle ( <i>Variable in dimensional analysis</i> )	[-]	8.16
$n$	Ordre réactionnel ( <i>Reaction order</i> )	[-]	11.4
$n$	Concentration ionique ( <i>Ionic concentration</i> )	[-]	12.8
$N$	Nombre ( <i>Number</i> )	[-]	13.11
$N_{H/vdW}$	Rapport des interactions hydrodynamiques et de van der Waals ( <i>Ratio between hydrodynamic and van der Waals interactions</i> )	[-]	12.7
$N_1$	Première différence normale ( <i>First normal difference</i> )	[Pa]	1.9
$N_2$	Deuxième différence normale ( <i>Second normal difference</i> )	[Pa]	1.9



$P, P_0$	Pression, pression de référence ( <i>Pressure, reference pressure</i> )	[Pa]	1.9
$P$	Périmètre de la section d'une conduite ( <i>Duct section perimeter</i> )	[m]	10.12
$P$	Opérateur différentiel ( <i>Differential operator</i> )		2.6
$P_d$	Pression exercée sur le piston ( <i>Piston pressure</i> )	[Pa]	9.1
$Pe$	Nombre de Péclet ( <i>Péclet's number</i> )	[-]	12.7
$Q$	Opérateur différentiel ( <i>Differential operator</i> )		2.6
$Q$	Débit ( <i>Flow Rate</i> )	[m <sup>3</sup> ·s <sup>-1</sup> ]	8.7
$r, R$	Rayon de la conduite ( <i>Duct radius</i> )	[m]	8.5
$r$	Coordonnée radiale ( <i>Radial coordinate</i> )	[m]	8.6
$R$	Constante des gaz parfaits ( $kN_A$ ; <i>Gaz constant</i> )	[J·mol <sup>-1</sup> ·K <sup>-1</sup> ]	5.3
$R(t)$	Fonction de relaxation ( <i>Relaxation function</i> )	[Pa]	1.12
$R_b$	Rayon du réservoir ( <i>Reservoir radius</i> )	[m]	9.1
$R_h$	Rayon hydraulique équivalent ( <i>Equivalent hydraulic radius</i> )	[m]	10.12
$R_v(t)$	Partie visqueuse de la fonction de relaxation ( <i>Viscous part of the relaxation function</i> )	[Pa]	2.17
$Re$	Nombre de Reynolds ( <i>Reynolds's number</i> )	[-]	1.17
$t, T$	Temps ( <i>Time</i> )	[s]	1.2
$T$	Température ( <i>Temperature</i> )	[K]	2.2
$T_g$	Température de transition vitreuse ( <i>Glass transition temperature</i> )	[K]	5.3
$T_{g0}$	Température de transition vitreuse du liquide non réagi ( <i>Glass transition temperature of unreacted liquid</i> )	[K]	11.11
$T_{g\infty}$	Température de transition vitreuse du solide complètement réticulé ( <i>Glass transition temperature of fully crosslinked solid</i> )	[K]	11.11
$T_R$	Rapport de Trouton ( <i>Trouton's ratio</i> )	[-]	1.18
$u, U$	Vitesse du fluide ( <i>Flow velocity</i> )	[m·s <sup>-1</sup> ]	1.7
$u_f$	Vitesse de frottement ( <i>Friction velocity</i> )	[m·s <sup>-1</sup> ]	10.6
$u_x, u_y, u_z$	Composantes du champ de vitesse ( <i>Velocity field components</i> )	[m·s <sup>-1</sup> ]	8.3
$u_r, u_\theta, u_z$	Composantes du champ de vitesse ( <i>Velocity field components</i> )	[m·s <sup>-1</sup> ]	9.6
$U_0$	Vitesse de la plaque ( <i>Plate velocity</i> )	[m·s <sup>-1</sup> ]	8.5

$v^*$	Volume d'activation ( <i>Activation volume</i> )	[m <sup>3</sup> ]	4.8
$v_e$	Vitesse d'électrophorèse ( <i>Electrophoresis rate</i> )	[m·s <sup>-1</sup> ]	12.9
$V$	Volume spécifique disponible ( <i>Available specific volume</i> )	[m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> ]	5.6
$V$	Vitesse caractéristique du fluide ( <i>Characteristic fluid velocity</i> )	[m·s <sup>-1</sup> ]	1.17
$V$	Volume du fluide ( <i>Fluid volume</i> )	[m <sup>3</sup> ]	10.13
$V_A$	Potentiel d'attraction ( <i>Attraction potential</i> )	[V]	14.3
$V_R$	Potentiel de répulsion ( <i>Repulsion potential</i> )	[V]	14.3
$V_f$	Volume libre spécifique ( <i>Specific free volume</i> )	[m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> ]	5.6
$V_{fg}$	Volume libre spécifique à $T_g$ ( <i>Specific free volume at <math>T_g</math></i> )	[m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> ]	5.6
$V_g$	Volume spécifique à $T_g$ ( <i>Specific volume at <math>T_g</math></i> )	[m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> ]	5.6
$V_0$	Volume spécifique occupé par les atomes (molécules)	[m <sup>3</sup> ·kg <sup>-1</sup> ]	5.6
$W$	Energie ( <i>Energy</i> )	[J]	3.9
$We$	Nombre de Weissenberg ( <i>Weissenberg number</i> )	[-]	1.17
$x,y,z$	Coordonnées spatiales ( <i>Spatial coordinates</i> )	[m]	1.4
$z$	Valence ionique (Ionic valence)	[-]	12.8
<i>Grecs</i>			
$\alpha$	Avancement ou taux de la réaction ( <i>Reaction rate</i> )	[-]	11.4
$\alpha$	Facteur d'encombrement stérique ( <i>Steric packing factor</i> )	[-]	13.4
$\alpha, \alpha_g, \alpha_l$	Coefficients d'expansion thermique, à l'état vitreux, à l'état liquide ( <i>Coefficients of thermal expansion, in glassy state, in liquid state</i> )	[K <sup>-1</sup> ]	5.6
$\alpha$	Angle du cône ( <i>Cone angle</i> )	[°]	9.7
$\beta$	Exposant du modèle KWW ( <i>KWW model exponent</i> )	[-]	4.4
$\chi$	Compressibilité, à l'état vitreux, à l'état solide ( <i>Compressibility</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	5.8
$\chi_g, \chi_l$	Compressibilité à l'état vitreux, à l'état solide ( <i>Compressibility in glassy state, in liquid state</i> )	[Pa <sup>-1</sup> ]	7.11

$\delta$	Angle de phase ( <i>Phase angle</i> )	[-]	3.4
$\delta$	Entrefer ( <i>Gap</i> )	[m]	9.6
$\delta$	Epaisseur de la couche visqueuse ( <i>Thickness of viscous layer</i> )	[m]	10.7
$\delta(t)$	Fonction de Dirac ( <i>Dirac function</i> )	[-]	2.26
$\delta(x)$	Couche limite ( <i>Boundary layer</i> )	[m]	10.13
$\varepsilon$	Déformation, élongation ( <i>Strain, Deformation, Elongation</i> )	[-]	1.2
$\varepsilon$	Constante diélectrique ( <i>Dielectric constant</i> )	[-]	12.8
$\dot{\varepsilon}$	Vitesse de déformation ( <i>Strain rate</i> )	[s <sup>-1</sup> ]	2.2
$\varepsilon_0$	Déformation initiale, amplitude de la déformation ( <i>Initial strain, strain amplitude</i> )	[-]	2.4
$\varepsilon_a$	Déformation d'un amortisseur ( <i>Deformation of a dashpot</i> )	[-]	2.7
$\varepsilon_e$	Déformation élastique retardée, fluage primaire ( <i>Elastic after-effect</i> )	[-]	1.15
$\varepsilon_e$	Déformation élastique instantanée ( <i>Instantaneous elastic deformation</i> )	[-]	1.15
$\varepsilon_v$	Déformation volumique hydrostatique ( <i>Hydrostatic volume deformation</i> )	[-]	1.11
$\varepsilon_s$	Déformation d'un ressort ( <i>Spring's deformation</i> )	[-]	2.7
$\varepsilon$	Fluage secondaire ( <i>Secondary creep</i> )	[-]	2.4
$\varepsilon$	Ecoulement visqueux, fluage secondaire ( <i>Viscous flow</i> )	[-]	1.15
$\varepsilon_0$	Permittivité du vide ( <i>Vacuum permittivity</i> )	[-]	12.8
$\phi$	Fraction volumique des particules ( <i>Particles volume fraction</i> )	[-]	13.1
$\phi_a$	Fraction volumique des agrégats ( <i>Volume fraction of aggregates</i> )	[-]	13.6
$\phi_{\max}$	Fraction volumique maximale ( <i>Maximum volume fraction</i> )	[-]	13.5
$\phi_{\text{ec}}$	Fraction volumique des particules sèches ( <i>Volume fraction of dry particles</i> )	[-]	13.7
$\phi_{\text{solv}}$	Fraction volumique des particules solvatées ( <i>Volume fraction of solvated particles</i> )	[-]	13.7
$\eta$	Viscosité dynamique ( <i>Dynamic viscosity</i> )	[Pa·s]	1.1
$\eta'$	Viscosité en phase ( <i>Real part viscosity</i> )	[Pa·s]	11.7

$\eta''$	Viscosité hors phase ( <i>Imaginary part viscosity</i> )	[Pa·s]	11.7
$\eta^*$	Viscosité complexe ( <i>Complex viscosity</i> )	[Pa·s]	11.7
$\eta_a$	Viscosité apparente ( <i>Apparent viscosity</i> )	[Pa·s]	8.13
$\eta_{ca}$	Viscosité de Casson ( <i>Casson's viscosity</i> )	[Pa·s]	14.4
$\eta_E$	Viscosité élongationnelle ( <i>Elongational viscosity</i> )	[Pa·s]	1.18
$\eta_g$	Viscosité à la température de transition vitreuse ( <i>Viscosity at <math>T_g</math></i> )	[Pa·s]	7.13
$\eta_N$	Viscosité Newtonienne ( <i>Newtonian viscosity</i> )	[Pa·s]	13.13
$\eta_{red}$	Viscosité réduite ( <i>Reduced viscosity</i> )	[-]	13.2
$\eta_{rel}$	Viscosité relative ( <i>Relative viscosity</i> )	[-]	1.6
$\eta_{sp}$	Viscosité spécifique ( <i>Specific viscosity</i> )	[-]	1.6
$\eta_0$	Viscosité du solvant ( <i>Solvent viscosity</i> )	[Pa·s]	1.6
$\eta_0$	Viscosité à une vitesse de cisaillement nulle ( <i>Zero shear-rate viscosity</i> )	[Pa·s]	7.1
$\eta_\infty$	Viscosité à une vitesse de cisaillement infinie ( <i>Infinite shear-rate viscosity</i> )	[Pa·s]	7.1
$[\eta]$	Viscosité intrinsèque ( <i>Intrinsic viscosity</i> )	[-]	1.6
$\kappa$	Consistance ( <i>Consistency</i> )	[Pa·s <sup>n</sup> ]	6.4
$\kappa$	Paramètre de la loi logarithmique ( <i>Logarithmic lay parameter</i> )	[-]	10.7
$\kappa^{-1}$	Epaisseur de la double couche ( <i>Thickness of the double layer</i> )	[m]	12.8
$\lambda$	Temps caractéristique du fluide ( <i>Characteristic time of the fluid</i> )	[s]	1.17
$\lambda$	Coefficient du facteur de forme ( <i>Aspect ratio coefficient</i> )	[-]	13.8
$\lambda_c$	Constante de temps caractéristique, temps de relaxation ( <i>Characteristic time constant, relaxation time</i> )	[s]	10.1
$\gamma$	Déformation de cisaillement ( <i>Shear strain</i> )	[-]	1.1
$\dot{\gamma}, \dot{\gamma}_0$	Vitesse de cisaillement, de référence ( <i>Shear rate, reference</i> )	[s <sup>-1</sup> ]	1.1
$\dot{\gamma}_a$	Vitesse de cisaillement apparent ( <i>Apparent shear rate</i> )	[s <sup>-1</sup> ]	8.9
$\dot{\gamma}_w$	Vitesse de cisaillement à la paroi ( <i>Wall shear rate</i> )	[s <sup>-1</sup> ]	8.9
$\nu$	Coefficient de Poisson ( <i>Poisson's coefficient</i> )	[-]	1.11

$\nu$	Viscosité cinématique ( <i>Kinematic viscosity</i> )	$[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}] = [\text{St}]$	1.6
$\Pi$	Produit de variable ( <i>Product of variables</i> )	$[-]$	8.16
$\rho$	Densité, masse spécifique ( <i>Density</i> )	$[\text{g} \cdot \text{cm}^{-3}]$	1.6
$\sigma, \sigma_0$	Contrainte, contrainte initiale, amplitude de la contrainte ( <i>Stress, initial stress, stress amplitude</i> )	$[\text{Pa}]$	1.2
$\sigma_{ij}$	Tenseur des contraintes ( <i>Stress tensor</i> )	$[\text{Pa}]$	1.9
$\sigma_M$	Tenseur des contraintes hydrostatiques ( <i>Hydrostatic stress tensor</i> )	$[\text{Pa}]$	1.10
$\sigma_D$	Tenseur déviatorique des contraintes ( <i>Deviatoric stress tensor</i> )	$[\text{Pa}]$	1.10
$\sigma_s$	Contrainte d'un amortisseur ( <i>Stress of a dashpot</i> )	$[\text{Pa}]$	2.11
$\sigma_r$	Contrainte d'un ressort ( <i>Stress of a spring</i> )	$[\text{Pa}]$	2.11
$\theta$	Coordonnée tangentielle ( <i>Tangential coordinate</i> )	$[\text{m}]$	8.6
$\Theta$	Température ( <i>Temperature</i> )	$[\text{K}]$	8.15
$\Theta$	Période de moyennage ( <i>Averaging period</i> )	$[\text{s}]$	10.5
$\tau$	Contrainte de cisaillement ( <i>Shear stress</i> )	$[\text{Pa}]$	1.1
$\tau_w$	Contrainte de cisaillement à la paroi ( <i>Wall shear stress</i> )	$[\text{Pa}]$	9.1
$\tau_\sigma$	Temps de retard ( <i>Delay time</i> )	$[\text{s}]$	2.16
$\tau_\varepsilon$	Temps de relaxation ( <i>Relaxation time</i> )	$[\text{s}]$	2.17
$\tau_0$	Seuil d'écoulement ( <i>Yield stress</i> )	$[\text{Pa}]$	13.12
$\omega$	Vitesse angulaire ou pulsation ( <i>Angular frequency or pulsation</i> )	$[\text{s}^{-1}]$	3.2
$\xi$	Déplacement en $x$ ( $x$ -displacement)	$[\text{m}]$	1.3
$\zeta$	Déplacement en $y$ ( $y$ -displacement)	$[\text{m}]$	1.3
$\zeta$	Potentiel zêta ( <i>Zeta potential</i> )	$[\text{V}]$	12.9

$\psi_1, \psi_2$	Fonctions matérielles ou viscosimétriques ( <i>Material or viscosimetric functions</i> )	[Pa·s <sup>2</sup> ]	1.10
$\Psi$	Potentiel électrostatique ( <i>Electrostatic potential</i> )	[V]	12.8
$\zeta$	Temps caractéristique du procédé d'écoulement ( <i>Characteristic time of the flow process</i> )	[s]	1.18